This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909729 7

WISKUNDIGE LEERCURSUS,

TEN GEBRUIKE

DER KONINKLIJKE MILITAIRE AKADEMIE.

GRONDEN

DER

BESCHRIJVENDE MEETKUNST,

VOOR DE

KADETTEN DER ARTILLERIE EN GENIE.

DOOR

H. STROOTMAN,

Lector in de Wiskunde.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

TWEEDE DRUK.

TE BREDA,

TER DRUKKERIJ VAN BROESE & COMP.

VOOR REKENING VAN DE

KONINKLIJKE MILITAIRE AKADEMIE.

1847.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
242969
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
1901

INHOUD.

Inleiding. . . . . Blz. 1.
Leerwijze der projectiën. . . . . — 4.
Oplossing van werkstukken, betrekkelijk de regte lijn en het platte vlak in de ruimte. . . . . — 19.
Over den drievlakkigen hoek, en oplossing van werkstukken, daartoe betrekkelijk. . . . . — 48.
Over het projecteren van veelvlakkige ligchamen, en het ontwikkelen van derzelver oppervlakken. . . . . — 56.
Over den bol, en oplossing van werkstukken, daartoe betrekkelijk. . . . . — 65.
Over de perspectief. . . . . — 80.
Over de schaduwen. . . . . — 92.
Over de projectiën der kromme lijnen, derzelver raaklijnen, normalen en normale vlakken. . . . . — 99.
Over de wording en constructie der gebogene oppervlakken. . — 109.
Over de cilindervlakken. . . . . — 111.
Over de kegelvlakken. . . . . — 115.
Over de scheeve oppervlakken. . . . . — 118.
Over de omwentelingsvlakken. . . . . — 122.
Over de ringvormige oppervlakken. . . . . — 128.
Verdeeling der oppervlakken in ontwikkelbare en onontwikkelbare. . . . . — 129.
Over de doorsnijding der gebogene oppervlakken. . . . . — 133.
Over de doorsnijding der gebogene oppervlakken met regte lijnen. . . . . — 133.
Over de doorsnijding der gebogene oppervlakken met platte vlakken. . . . . — 134.
Over de onderlinge doorsnijding der gebogene oppervlakken. . . . . — 138.
Over de ontwikkeling der oppervlakken. . . . . — 148.
Over de rakende vlakken aan de gebogene oppervlakken. . . — 154.
Over het projecteren van ligchamen, die gedeeltelijk door gebogene oppervlakken begrensd worden. . . . . — 167.
Over de perspectief (*Vervolg van bl.* 91). . . . . — 171.
Over de isometrische perspectief. . . . . — 173.
Over de schaduwen (*Vervolg van bl.*. 98), ... — 178.
Werkstukken tot oefening. . . . . — 183.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

GRONDEN

DER

BESCHRIJVENDE MEETKUNST.

INLEIDING.

§ 1. Meetkunstige grootheden, die slechts twee afmetingen hebben, dat is, vlakke figuren, kunnen in hunne ware gedaante en grootte onmiddellijk op een plat vlak worden voorgesteld, dewijl dit zelf twee afmetingen heeft, en er tot het voorstellen van vlakke figuren even zooveel vereischt worden. Geheel anders is het er mede gelegen, wanneer meetkunstige grootheden, welker deelen niet in een zelfde vlak liggen, of die meer dan twee afmetingen hebben, dat is, ligchamen, op een plat vlak moeten worden voorgesteld. De tak der wiskunde, die hierover handelt, wordt *beschrijvende meetkunst* genoemd: deze leert namelijk, hoe voorwerpen, die zich in de ruimte bevinden, op een plat vlak worden voorgesteld; en omgekeerd, hoe men uit zulk eene voorstelling de ware gedaante en grootte der voorwerpen weder kan leeren kennen, en alles kan afleiden, wat hieruit en uit de verschillende standen der voorwerpen in de ruimte voortvloeit.

§ 2. Uit dit tweeledig oogpunt beschouwd, is de beschrijvende meetkunst even zoo nuttig als belangrijk. Voor zooverre als zij ligchamelijke voorwerpen op een plat vlak leert voorstellen, is zij teekenkunst; verschillende echter wezenlijk van de gewone teekenkunst, welker beloeling is, de sprekendste overeenkomst met eenig voorwerp, voor te stellen in dien toestand, waarin het zich uit een zeker standpunt aan het oog des beschouwers vertoont. Uit zoodanige voorstellingen laat zich echter noch de ware grootte en onderlinge ligging der voorwerpen en van hunne bestanddeelen, noch al datgene, wat hieruit voortvloeit, zoo eenvoudig en zoo bepaald afleiden, als zulks tot een klaar begrip van het voorgestelde voorwerp, en in het bijzonder tot deszelfs vervaardiging naar de teekening, vereischt wordt.

Daarentegen kunnen uit de voorstellingen der beschrijvende meetkunst, de juiste afmetingen der voorwerpen, alsmede hunne ware gedaante en stand onmiddellijk bepaald, of op eene eenvoudige en gemakkelijke wijze gevonden worden. Zij stelt derhalve den werktuigkundige, bouwkundige, enz. in staat, om door teekeningen zijne denkbeelden en

ontwerpen aan anderen en zich zelven tot naauwkeurig onderzoek te onderwerpen, en die met de vereischte naauwkeurigheid uit te voeren. Zij is het middel tot algemeene verbreiding van nuttige uitvindingen in het vak der werktuigkunde, bouwkunde en andere kunsten, dewijl zij deze uitvindingen aan anderen leert mededeelen op eene volkomener wijze, dan zulks door de volledigste omschrijving zou kunnen geschieden.

Uit het ander oogpunt beschouwd, namelijk in zooverre de beschrijvende meetkunst uit de door haar verkregene voorstellingen van voorwerpen alles leert afleiden, wat uit derzelver grootte, gedaante en stand voortvloeit, is zij voor den practischen kunstenaar en den denkenden handwerksman onontbeerlijk, dewijl deze door haar slechts kan worden in staat gesteld, om duidelijke teekeningen te ontwerpen, die te verstaan, en er het voorwerp behoorlijk naar te kunnen vervaardigen. Hare kennis is dus in het algemeen noodzakelijk voor hen, die kunstmatige voorwerpen moeten ontwerpen en laten vervaardigen.

Niet minder nuttig, ja zelfs onontbeerlijk, is de beschrijvende meetkunst tot het ontwerpen van perspectivische teekeningen, en ter bepaling van licht en schaduw in platte gronden en opstanden. Deze beide takken der teekenkunst kunnen slechts door haar alleen grondig beoefend worden.

Om het nut van de beschrijvende meetkunst voor den krijgsman, en in het bijzonder voor den ingenieur en artillerist te bewijzen, behoeft men slechts te zeggen, dat deze zonder haar noch in staat is, om behoorlijke teekeningen van voorwerpen uit de fortificatie en artillerie te ontwerpen en uit te voeren, noch die te verstaan en te beoordeelen. Men gevoelt het nut van de beschrijvende meetkunst voor den beschaafden militair nog meer, wanneer men bedenkt, dat zoovele militaire werken met platen in het licht verschijnen.

Eindelijk maakt de beschrijvende meetkunst de beoefening der analytische meetkunst gemakkelijker. Zij is een voortreffelijk middel, om het verstand en de verbeeldingskracht te oefenen en te versterken, en is tevens zeer geschikt, om hem, die haar beoefent, eene even aanlokkelijke, als verstandelijke bezigheid te verschaffen.

§ 3. Dewijl nu de voor te stellen ligchamen door vlakken, de vlakken door lijnen, en deze laatste door punten begrensd worden, komt het er vooreerst op aan, den stand van een punt in de ruimte te bepalen.

De stand van een punt in de ruimte kan slechts bepaald worden door behulp van andere voorwerpen, die in stand gegeven zijn. Zullen deze voorwerpen echter van menigvuldige toepassing kunnen wezen, en gemakkelijk aangewezen kunnen worden, dan is het van belang, dat zij zoo eenvoudig mogelijk zijn. Zij kunnen dus niets anders wezen, dan punten, lijnen of vlakken, ten opzigte waarvan men den stand van het te bepalen punt beschouwt.

§ 4. Moet nu het te bepalen punt, van een gegeven punt een' zekeren afstand hebben, dan ziet men gemakkelijk in, dat elk punt van het oppervlak eens bols, welke dit gegeven punt tot middelpunt en dien gegeven' afstand tot straal heeft, aan deze voorwaarde voldoet, en dat dus het gezochte punt nog onbepaald is. Heeft het, ter nadere bepaling, ook van een tweede gegeven punt eenen bekenden afstand, dan ligt het

weder op het oppervlak des bols, welke dit tweede punt tot middelpunt, en dezen afstand tot straal heeft; het bevindt zich dus in de gemeene doorsnede dezer twee oppervlakken, en is alzoo nog niet bepaald. Beschouwt men het derhalve nog ten opzigte van een derde punt, dan is het klaar, dat aan hetzelve eindelijk de twee punten beantwoorden, waarin de doorsnede van de twee eerste oppervlakken gesneden wordt door een derde oppervlak eens bols, welke den afstand tot het derde punt tot straal heeft.

§ 5. Moet het te bepalen punt, van eene regte lijn eenen zekeren afstand hebben, dan voldoet weder elk punt van het cilindervlak, dat deze regte lijn tot as, en den gegevenen afstand tot straal van het grondvlak heeft. Om hetzelve nog nader te bepalen, moet men op eene dergelijke wijze te werk gaan, als zoo even bij het punt geschied is. Het is klaar, dat het gezochte punt eerst door behulp van zijne afstanden tot drie regte lijnen derwijze zal bepaald wezen, dat aan hetzelve zullen beantwoorden de snijpunten van drie cilindervlakken, welke die regte lijnen tot assen, en de afstanden van het punt tot deze regte lijnen tot straal hebben.

§ 6. Heeft het te bepalen punt p, van eenig vlak A den afstand a, dan voldoet ieder punt van de vlakken A′ en A″, welke op dezen afstand evenwijdig aan het vlak A kunnen gebragt worden, aan dit vereischte, derhalve is het punt p nog onbepaald. Moet het tevens den afstand b van eenig vlak B hebben, dat niet evenwijdig met het vlak A is, dan voldoet aan deze voorwaarde ieder punt van de twee vlakken B′ en B″, die op den afstand b evenwijdig aan B kunnen gebragt worden. Daar nu het punt p te gelijkertijd in twee der vier vlakken A′, B′, A″ en B″ moet liggen, zoo ligt het in eene der vier doorsneden dezer vlakken, en is derhalve nog niet bepaald. Voegt men hierbij nog de derde voorwaarde, dat het punt p ook den afstand c van een derde vlak C moet hebben, dat niet evenwijdig is met A of B, dan voldoet aan deze voorwaarde weder elk punt van de twee vlakken C′ en C″, die op den afstand c met C evenwijdig zijn. Dewijl nu het punt p te gelijkertijd in drie der zes vlakken A′, B′, C′, A″, B″ en C″ moet liggen, om aan de drie voorwaarden te voldoen, zoo moet het een der acht punten zijn, waarin de vier doorsneden van A′, B′, A″ en B″ door de vlakken C′ en C″ gesneden worden. De stand van het te bepalen punt blijft derhalve, zonder bijvoeging van nieuwe voorwaarden, altijd nog twijfelachtig tusschen acht punten, niettegenstaande men zes regte vlakken gebruikt heeft.

§ 7. Daar alzoo deze handelwijzen om het voorgestelde doel te bereiken, niet eenvoudig genoeg zijn, om bij eene veelvuldige toepassing het vereischte gemak aan te brengen, zoo is men op andere middelen bedacht geweest, om de ligging van een punt in de ruimte te bepalen, en, door behulp der projectiën, is men daarin zoo verre geslaagd, dat twee vlakken daartoe genoegzaam zijn. Deze leerwijze der projectiën zal in de volgende afdeeling verklaard worden.

---

en men brengt door deze projectiën, vlakken A'B en A''B, loodregt op de vlakken PQ en RQ, dan zal de regte lijn AB in elk der projecterende vlakken A'B en A''B gelegen wezen; deze regte lijn zal derhalve de doorsnede wezen van deze twee laatste vlakken.

§ 18. Twee lijnen, naar welgevallen genomen in de vlakken van projectie, kunnen alleen dan beschouwd worden als de projectiën van eene zelfde lijn in de ruimte, wanneer de vlakken, die door deze lijnen loodregt op de projectievlakken gebragt worden, niet evenwijdig zijn.

Wanneer dus twee lijnen, elk gelegen in een der projectievlakken, beide loodregt zijn op de as van projectie in twee verschillende punten, kunnen zij niet de projectiën zijn van eenige lijn in de ruimte; want de vlakken, die door deze lijnen loodregt op de projectievlakken kunnen gebragt worden, zijn evenwijdig.

Als twee lijnen beide loodregt staan op de as van projectie, in een zelfde punt, dan kan men deze lijnen wel beschouwen als de projectiën van eenige lijn in de ruimte; maar dewijl derzelver projecterende vlakken dan in elkander vallen, en dus slechts één vlak uitmaken, blijft zij geheel en al onbepaald in dat vlak.

§ 19. Dewijl een plat vlak bepaald wordt door drie punten, die niet in eene regte lijn liggen, of door twee evenwijdige lijnen, of door twee elkander snijdende lijnen, zal ook een vlak in de ruimte door bovengenoemde gegevens bepaald wezen, dewijl deze gegevens door hunne projectiën bepaald worden.

Daar echter de eerste dezer voorwaarden dezelfde is als de derde, en het overigens onverschillig is, waar de twee evenwijdige of de elkander snijdende lijnen in het door dezelve te bepalen vlak gelegen zijn, zoo is het geschiktste, deze lijnen zoodanig aan te nemen, dat zij, ten opzigte van de projectievlakken, het gemakkelijkst te construeren zijn. Dit geschiedt klaarblijkelijk, door voor dezelve de doorsneden te nemen van het vlak met de beide projectievlakken. Zoo is b. v. het vlak A*A* (fig. 6) bepaald, door middel van deszelfs doorsneden A'*A* en A''*A* met de vlakken van projectie PQ en RQ, welke doorsneden alsdan de *doorgangen* van het vlak A*A* met de vlakken van projectie genoemd worden.

De stand van een vlak is dus bepaald, zoodra men deszelfs doorgangen kent met twee vlakken, die elkander snijden.

§ 20. De beide doorgangen A'*A* en A''*A* (fig. 6) zullen, hoe ver aan beide zijden verlengd, altijd hetzelfde vlak A*A* blijven bepalen, en zij gaan beide door hetzelfde punt *A* van de as van projectie, zijnde dit het punt, waar deze as het vlak snijdt.

Is echter de stand van een vlak A'A'' (fig. 7) zoodanig, dat de as van projectie aan hetzelve evenwijdig loopt, en dat dus deze het vlak op eenen oneindigen afstand snijdt, dan loopen ook de doorgangen A'A' en A''A'' evenwijdig aan de as van projectie SQ.

Twee lijnen, naar welgevallen genomen in twee vlakken, die elkander snijden, zullen dus dan alleen den stand van eenig vlak kunnen bepalen, wanneer deze lijnen door een zelfde punt van de as van projectie gaan, of met dezelve evenwijdig loopen.

§ 21. Ook de gebogene vlakken worden alleen door lijnen, en wel gewoonlijk door twee lijnen voorgesteld, waarvan de eene het gebogene

vlak voortbrengt, terwijl zij zich onder zekere gegevene voorwaarden over de andere heen beweegt, zoodat men alzoo in staat is, om gemakkelijk elken stand van de bewegende lijn, en daardoor ook elk punt van het gebogen vlak, aan te wijzen.

§ 22. Het is gemakkelijk in te zien, dat het voorstellen van ligchamen geene zwarigheden meer kan opleveren, zoodra men derzelver ribben, of de vlakken, waardoor zij begrensd worden, kan voorstellen.

§ 23. Na deze algemeene beschouwingen over de voorstelling van meetkunstige grootheden, door middel van de leerwijze der projectiën, gaan wij over tot eèn nader onderzoek der projectievlakken zelven.

Dewijl alle projectiën op een zelfde vlak, namelijk op het vlak van teekening, moeten worden voorgesteld, verbeeldt men zich altijd, dat een der vlakken van projectie om de as van projectie wentelt, tot dat hetzelve op het andere vlak komt te vallen. Daar nu het vlak PP, (fig. 1), dat door de beide projecterende lijnen PP' en PP'' gaat, loodregt staat op de beide projectievlakken BB' en CC', zal de gemeene doorsnede AS dezer vlakken, of de as van projectie, loodregt staan op het vlak PP, en dus ook op de lijnen PP' en PP'', die de doorsneden zijn van het vlak PP met de vlakken van projectie BB' en CC', zoodat $P''PP'$ de standhoek is der vlakken BB' en CC'. Wordt dus het vlak CC' om de as van projectie naar achteren omgewenteld, tot dat hetzelve op BB' valt, dan zal de lijn $P'P$, die loodregt staat op AS, gedurende die omwenteling loodregt op AS blijven, en dus, zoodra de beide vlakken van projectie slechts één vlak uitmaken, in het verlengde vallen van $P''P$, die mede loodregt staat op AS, en door hetzelfde punt P gaat.

De beide projectiën van een zelfde punt op twee vlakken, die elkander snijden, liggen dus altijd in eene lijn, die loodregt door de as van projectie gaat.

§ 24. Uit hetgeen in de vorige § gezegd is, volgt nog, dat als men de projectie van een punt op een vlak kent, de projectie van dat punt op een tweede vlak, dat het eerste snijdt, gelegen zal wezen in eene lijn, die uit de bekende projectie loodregt door de gemeene doorsnede der beide vlakken getrokken wordt; en dat twee punten, genomen in twee vlakken, die elkander snijden, dan alleen de projectiën van een zelfde punt in de ruimte kunnen wezen, wanneer de lijn, die deze beide punten vereenigt, loodregt gaat door de gemeene doorsnede dezer vlakken.

§ 25. Ofschoon het onverschillig is, welken hoek de beide projectievlakken met elkander maken, en welken stand zij in de ruimte hebben, worden zij echter eenvoudigheidshalve altijd loodregt op elkander ondersteld, terwijl het eene horizontaal, en dus het andere verticaal wordt aangenomen. Het eene heet daarom het *horizontale*, en het andere het *verticale vlak van projectie;* terwijl de in hen liggende projectiën en doorgangen in *horizontale* en *verticale projectiën*, en in *horizontale* en *verticale doorgangen* worden onderscheiden. Beide projectievlakken worden overigens als geheel onbegrensd beschouwd (*).

(*) In de bouwkunst, wordt de teekening, die men verkrijgt, wanneer men eene der zijden eens gebouws met alle merkwaardige punten en lijnen op een verticaal vlak projec-

Verder heeft men (§ 23), om al de projectiën in een zelfde vlak voor te stellen, eens en vooral aangenomen, dat het bovenste gedeelte van het verticale vlak om de as van projectie naar achteren is omgewenteld, tot dat hetzelve op het achterste gedeelte van het horizontale, en dus te gelijkertijd het onderste gedeelte van het verticale op het voorste gedeelte van het horizontale vlak komt te vallen.

De aldus in elkander geslagene vlakken, dragen den naam van *constructie-figuur*, of *vlak van teekening*.

§ 26. Is nu HH′ (fig. 8) het horizontale, en VV′ het verticale vlak van projectie, en wordt het punt P op beide vlakken geprojecteerd, zoodat P′ de horizontale, en P″ de verticale projectie van het punt P is, dan is de standhoek P′*P*P″ regt, en dewijl de hoeken PP′*P* en PP″*P* mede regt zijn, zoo is PP′*P*P″ een regthoek: derhalve P″*P* = PP′ en P′*P* = PP″

Daar verder PP′ en PP″ de afstanden zijn, waarop het punt P zich van het horizontale en verticale vlak van projectie bevindt, en de lijnen P″*P* en P′*P* niet veranderen, wanneer de vlakken van projectie op bovengenoemde wijze in elkander geslagen zijn (fig. 9), maar alsdan (§ 23) slechts ééne loodlijn P″P′ op de as van projectie uitmaken, zoo volgt hieruit, *dat in het vlak van teekening de afstand van de verticale projectie van eenig punt tot de as van projectie, den afstand aanwijst, waarop dit punt ondersteld wordt van het horizontale vlak te staan; en dat de afstand van de horizontale projectie van eenig punt tot de as van projectie, den afstand aanwijst, waarop het punt ondersteld wordt van het verticale vlak te staan.*

§ 27. Om de punten uit het horizontale en verticale vlak, wanneer zij in elkander geslagen zijn, en dus slechts één vlak uitmaken, behoorlijk van elkander te onderscheiden, zal voortaan de horizontale projectie van eenig punt in de ruimte altijd aangewezen worden door dezelfde letter, die men bij het punt onderstelt, maar met één accent; de verticale projectie, door dezelfde letter met twee accenten, en het gemeene voetpunt der loodlijnen, die uit de projectiën op de as vallen, door dezelfde schuine letter.

Kortheidshalve zal door (P′, P″) een punt P in de ruimte aangeduid worden, waarvan P′ de horizontale, en P″ de verticale projectie is; door (A′B′, A″B″) eene lijn AB in de ruimte, waarvan A′B′ de horizontale, en A″B″ de verticale projectie is; terwijl B′*B*B″ een vlak zal voorstellen, hebbende B′*B* tot horizontalen, en B″*B* tot verticalen doorgang.

§ 28. Door de snijding der twee vlakken van projectie, wordt de geheele onbepaalde ruimte in vier tweevlakkige hoeken verdeeld.

Een punt in de ruimte kan nu, in elk dezer tweevlakkige hoeken, in een der beide vlakken van projectie, of in beide gelegen wezen.

---

teert, de *opstand of elevatie des gebouws* genoemd. Verbeeldt men zich een gebouw gesneden door een verticaal vlak, en wordt de aldus verkregene doorsnede geprojecteerd op een vlak, dat evenwijdig is met het snijdende vlak, dan heet zulk eene teekening *doorsnede* of *profil*. Wordt de voet eens gebouws, of eene verdieping van hetzelve, op een horizontaal vlak geprojecteerd, dan verkrijgt men den *platten grond*.

Denkt men zich nu altijd de twee vlakken van projectie op de in § 25 beschrevene wijze in elkander geslagen te zijn, dan zal men bevinden, dat als het punt ligt:

1°. In den eersten tweevlakkigen hoek, of boven het horizontale, en vóór het verticale vlak, (fig. 9) — de verticale projectie boven, en de horizontale projectie beneden de as van projectie zal vallen.

2°. In den tweeden tweevlakkigen hoek, of onder het horizontale, en vóór het verticale vlak, — de beide projectiën beneden de as van projectie zullen vallen.

3°. In den derden tweevlakkigen hoek, of onder het horizontale, en achter het verticale vlak, — de horizontale projectie boven, en de verticale projectie beneden de as van projectie zal vallen.

4°. In den vierden tweevlakkigen hoek, of boven het horizontale, en achter het verticale vlak, — de beide projectiën boven de as van projectie zullen vallen.

5°. In het horizontale, en vóór het verticale vlak, — de horizontale projectie beneden, en de verticale projectie in de as van projectie zal vallen.

6°. In het horizontale, en achter het verticale vlak, — de horizontale projectie boven, en de verticale projectie in de as zal vallen.

7°. In het verticale, en boven het horizontale vlak, — de verticale projectie boven, en de horizontale projectie in de as zal vallen.

8°. In het verticale, en beneden het horizontale vlak, — de verticale projectie beneden, en de horizontale projectie in de as zal vallen.

9°. In beide vlakken, of in de as van projectie, — de beide projectiën in elkander in de as van projectie zullen vallen.

Gebeurt het in het tweede of vierde der bovengenoemde gevallen, dat de beide projectiën in elkander vallen, dan zal zulks, op grond van het bewezene in § 26, aantoonen, dat het punt in de ruimte even ver van het horizontale, als van het verticale vlak gelegen is.

Men oefene zich voorts, om omgekeerd, uit de ligging van de projectiën, den stand van het punt in de ruimte, ten opzigte der projectievlakken, te bepalen.

§ 29. Dewijl de stand van een punt in de ruimte volkomen bepaald is, wanneer men deszelfs beide projectiën kent op twee vlakken, die elkander snijden, zoo zal in het vervolg door een gegeven punt verstaan worden een punt, waarvan de beide projectiën gegeven zijn; en als er gevraagd wordt, een punt te bepalen, zal het er slechts op aankomen, de beide projectiën van dat punt te construeren.

§ 30. Is een punt gegeven door zijne beide projectiën op twee elkander loodregt snijdende vlakken, die op de gewone wijze in elkander geslagen zijn, en wil men zich uit deze beide projectiën van het punt, den stand van het punt in de ruimte ten opzigte der beide projectievlakken voorstellen, dan beginne men, met zich het verticale vlak om de as van projectie weder opgeslagen te denken, tot dat het loodregt sta op het horizontale vlak; vervolgens verbeelde men zich eene loodlijn uit de horizontale projectie op het horizontale vlak en tevens eene loodlijn uit de verticale projectie op het verticale vlak opgerigt, dan zal het snijpunt dezer loodlijnen het punt in de ruimte aanwijzen.

§ 31. Wanneer HS (fig. 10) het horizontale, VS het verticale vlak van projectie, en CD eene willekeurige lijn in de ruimte is, dan zal C'D' de horizontale, en C''D'' de verticale projectie dezer lijn wezen. Hoe ver nu ook C'D' en C''D'' aan beide zijden verlengd worden, blijven zij altijd de projectiën der onbepaalde lijn, die door de punten C en D gaat. Volgens het bewezene in § 26, wordt van elk willekeurig punt X in deze lijn, de afstand tot het horizontale vlak door X''*X*, en de afstand tot het verticale vlak door X'*X* aangewezen. Bij het in elkander slaan van de vlakken van projectie, veranderen de projectiën C'D' en C''D'' niet van stand ten opzigte van de as van projectie; derhalve zal ook in fig. 11 door X''*X* de afstand van het punt X tot het horizontale vlak, en door X'*X* de afstand van het punt X tot het verticale vlak worden aangewezen.

Het is verder klaar, dat bij den hellenden stand, dien de lijn CD, zoowel ten opzigte van het horizontale, als van het verticale vlak heeft, elk der lijnen X'D' en X''D'' kleiner zal wezen, dan de lijn XD, waarvan zij de projectiën zijn.

§ 32. Beschouwt men de verschillende standen, die eene lijn ten opzigte van de projectievlakken kan hebben, dan zal men bevinden, dat als eene lijn:

1°. Noch evenwijdig aan het horizontale, noch evenwijdig aan het verticale vlak is, (fig. 11) — de beide projectiën ook eenen willekeurigen stand ten opzigte van de as van projectie zullen hebben.

2°. Evenwijdig is aan het horizontale vlak, — de verticale projectie evenwijdig zal loopen aan de as van projectie.

3°. Evenwijdig is aan het verticale vlak, — de horizontale projectie evenwijdig zal loopen aan de as van projectie.

4°. Evenwijdig is aan beide projectievlakken, — de beide projectiën ook evenwijdig zullen loopen aan de as van projectie.

5°. In het horizontale vlak gelegen is, — de verticale projectie in de as van projectie zal liggen.

6°. In het verticale vlak gelegen is, — de horizontale projectie in de as van projectie zal liggen.

7°. In beide vlakken, of in de as van projectie gelegen is, — de beide projectiën ook in de as van projectie zullen liggen.

8°. Door de as van projectie gaat, — de beide projectiën elkander in de as van projectie zullen snijden.

9°. Loodregt staat op het horizontale vlak, — de horizontale projectie een enkel punt, en de verticale projectie loodregt op de as van projectie zal wezen.

10°. Loodregt staat op het verticale vlak, — de verticale projectie een enkel punt, en de horizontale projectie loodregt op de as van projectie zal wezen.

In elk der acht eerste gevallen, zal men telkens de horizontale projectie van eenig punt der lijn kunnen aannemen, om daaruit deszelfs verticale projectie te bepalen, of omgekeerd. Neemt men echter in het negende geval de horizontale projectie van eenig punt aan, dan zal deszelfs verticale projectie onbepaald blijven. Even zoo zal in het tiende geval, de horizontale projectie van eenig punt onbepaald blijven, wanneer deszelfs verticale projectie wordt aangenomen.

Verder valt nog op te merken, dat in die gevallen, waarin de lijn evenwijdig loopt aan een der projectievlakken, hetgeen met uitzondering van het eerste en achtste der bovengenoemde gevallen plaats heeft, de projectie van eenig deel der lijn op dat vlak, gelijk zal zijn aan de werkelijke lengte van dat deel.

Men oefene zich, om omgekeerd, uit den stand van de projectiën eener lijn, den stand van de lijn, ten opzigte der projectievlakken, te bepalen.

§ 33. Heeft eene lijn CD (fig. 12) zoodanigen stand ten opzigte der projectievlakken, dat derzelver projecterende vlakken in elkander vallen, en dus slechts één vlak CD uitmaken, dan staan de projectiën C′D′ en C″D″ dezer lijn beide loodregt op de as van projectie, en gaan door een zelfde punt *D*. Worden nu de projectievlakken in elkander gebragt, (fig. 13), dan zullen deze projectiën, omdat zij beide loodregt staan op de as van projectie, en door een zelfde punt van dezelve gaan, in elkanders verlengde vallen.

In § 18 is reeds opgemerkt, dat bij zulk een' stand der projectiën, de lijn geheel en al onbepaald blijft in het vlak C*D*; immers is het klaar, dat elke regte of kromme lijn, gelegen in dit vlak, dezelfde projectiën zal hebben. Om derhalve de lijn CD te bepalen, zal men een nieuw projectievlak moeten aannemen: zoo zal b. v. de lijn CD (fig. 12) bepaald zijn door hare projectiën C′D′ en CD op het horizontale vlak HS en het nieuwe verticale vlak C*D*.

Wanneer dus de projectiën eener lijn loodregt staan op de as van projectie, en door een zelfde punt van dezelve gaan, dan is deze lijn geheel onbepaald, en men zal nieuwe projectievlakken moeten aannemen, om dezelve te bepalen.

§ 34. Dewijl de stand eener lijn in de ruimte volkomen bepaald is, wanneer men hare projectiën kent op twee vlakken, die elkander snijden, een enkel geval (§ 33) uitgezonderd, zoo zal in het vervolg door eene gegevene lijn verstaan worden eene lijn, waarvan de beide projectiën gegeven zijn, en als er gevraagd wordt, eene lijn te bepalen, zal het er op aan komen, de beide projectiën dezer lijn te construeren.

§ 35. Liggen de beide projectiën van een punt in de overeenkomstige projectiën eener lijn, dan zal ook het punt zelf in die lijn gelegen wezen. Moet dus eene lijn door een punt in de ruimte gaan, dan moeten de beide projectiën der lijn ook door de gelijknamige projectiën van dat punt getrokken worden. Moet men een punt bepalen, en weet men, dat hetzelve in eene reeds bekende lijn moet liggen, dan zal het genoeg zijn, eene der beide projectiën van dat punt te vinden. Moet men eindelijk een punt in eene gegevene lijn aannemen, dan zal dit kunnen geschieden, door eene der beide projectiën van het punt in de overeenkomstige projectie van de lijn aan te nemen; want dan zal de andere projectie van het punt daardoor bepaald wezen.

Liggen de beide projectiën van een punt buiten de projectiën eener lijn, dan ligt het punt in de ruimte ook geheel buiten die lijn.

Ligt slechts ééne der beide projectiën van een punt in de overeenkomstige projectie van eene lijn, dan ligt het punt in de ruimte ook wel buiten die lijn, maar toch in een der projecterende vlakken van de lijn.

§ 36. Om zich eene lijn, gegeven door hare beide projectiën, op twee

elkander loodregt snijdende vlakken, die op de gewone wijze in elkander geslagen zijn, weder in haren wezenlijken stand ten opzigte der projectievlakken voor te stellen, moet men eerst het verticale vlak om de as van projectie opgeslagen denken, tot dat hetzelve loodregt komt te staan op het horizontale vlak; vervolgens zich door elk der gegevene projectiën vlakken verbeelden, die loodregt staan op de overeenkomstige projectievlakken; de doorsnede dezer beide projecterende vlakken zal dan den begeerden stand der lijn aanduiden.

§ 37. *Als twee lijnen in de ruimte evenwijdig zijn, zullen hare projectiën op een zelfde vlak mede evenwijdig zijn.*

Want zijn AB en CD (fig. 14) de twee evenwijdige lijnen, AB′ en CD′ hare projecterende vlakken op het vlak PQ, en dus (§ 16) A′B′ en C′D′ hare projectiën op dit vlak, dan is, omdat de lijnen AB en CD, alsmede BB′ en DD′ evenwijdig zijn, het projecterend vlak AB′ evenwijdig aan het projecterend vlak CD′. De doorsneden A′B′ en C′D′ van deze twee evenwijdige vlakken met het vlak PQ, of de projectiën der gegevene lijnen, zijn derhalve ook evenwijdig.

Elke willekeurige lijn ab, gelegen in het projecterend vlak AB′, zal insgelijks op het vlak PQ de lijn A′B′ tot projectie hebben. De projectiën A′B′ en C′D′ van twee lijnen ab en CD op een zelfde vlak PQ, kunnen dus wel evenwijdig zijn, zonder dat de lijnen ab en CD evenwijdig loopen. Wanneer dus de projectiën van twee lijnen op een zelfde vlak evenwijdig zijn, mag men daaruit geenszins besluiten, dat ook de lijnen in de ruimte evenwijdig zijn: dit toont alleen aan, dat derzelver projecterende vlakken op dat vlak, aan elkander evenwijdig loopen.

§ 38. *Als twee lijnen geprojecteerd zijn op twee vlakken, die elkander snijden, en de projectiën dezer lijnen op het eene vlak, zoowel als die op het andere vlak, aan elkander evenwijdig zijn, dan zijn ook de lijnen in de ruimte aan elkander evenwijdig.*

Want, volgens de aanmerking in het slot der vorige §, zijn de projecterende vlakken dezer lijnen, zoowel op het eene als op het andere projectievlak, aan elkander evenwijdig. Deze vier projecterende vlakken snijden elkander nu volgens vier onderling evenwijdige lijnen, en daar onder deze vier lijnen zich ook de twee lijnen in de ruimte bevinden, zijn ook deze laatste evenwijdig.

Het is klaar, dat als de projectiën van twee lijnen op het eene projectievlak evenwijdig zijn, en op het andere in elkander vallen, de lijnen in de ruimte dan almede evenwijdig zullen wezen.

§ 39. Projecteert men twee elkander snijdende lijnen op twee vlakken, die elkander snijden, en liggen deze lijnen niet in een zelfde projecterend vlak op een der projectievlaken, dan zullen ook de projectiën dezer lijnen, zoowel op het eene, als op het andere projectievlak, elkander snijden. De snijpunten dezer projectiën zijn de projectiën van het snijpunt der lijnen in de ruimte, en deze snijpunten moeten dus, als zijnde de projectiën van een zelfde punt in de ruimte (§ 23), in eene lijn gelegen wezen, die loodregt door de as van projectie gaat.

Projecteert men echter twee elkander snijdende lijnen op twee vlakken, die elkander snijden, en liggen deze lijnen in een zelfde projecterend

vlak op een der beide projectievlakken, dan zullen de projectiën dezer lijnen op dat vlak in elkander vallen, terwijl die op het andere vlak elkander zullen snijden.

Als dus twee lijnen in de ruimte elkander snijden, zullen hare projectiën op een zelfde vlak elkander snijden, of in elkander vallen, naargelang deze lijnen niet of al in een zelfde projecterend vlak gelegen zijn.

Kruisen twee lijnen elkander, zonder elkander te snijden, en projecteert men deze lijnen op twee vlakken, die elkander snijden, dan kunnen hare projectiën op het eene vlak elkander snijden, en op het andere evenwijdig loopen, als namelijk hare projecterende vlakken op dat vlak evenwijdig zijn. Of wel, hare projectiën op het eene vlak, zoowel als die op het andere vlak, kunnen elkander snijden; maar in dat geval zullen deze snijpunten niet de projectiën zijn van een zelfde punt in de ruimte, en dus niet in eene lijn gelegen wezen, die loodregt door de as van projectie gaat (*).

Om dus te onderzoeken, of twee lijnen, waarvan de horizontale, zoowel als de verticale projectiën elkander snijden, elkander in de ruimte zullen snijden, late men uit een dezer snijpunten eene loodlijn vallen op de as van projectie; gaat deze loodlijn ook door het andere snijpunt, dan snijden de lijnen in de ruimte elkander.

In fig. 15, b. v. wordt de lijn (P'Q', P''Q'') gesneden door de lijn (R'S', R''S''); want de loodlijn, die uit V'' op de as van projectie valt, gaat ook door V'. Het snijpunt dezer lijnen is het punt (V', V'').

Vallen de horizontale projectiën van twee lijnen in elkander, terwijl de verticale elkander snijden, of omgekeerd, dan snijden de lijnen in de ruimte elkander altijd; want dan liggen zij in een zelfde vlak, en zijn niet evenwijdig.

In fig. 16, b. v. wordt de lijn (P'Q', P''Q'') gesneden door de lijn (P'Q', R''S''), en wel in het punt (V', V'').

Snijden de horizontale, zoowel als de verticale projectiën van twee lijnen elkander, maar gaat de loodlijn, die uit het eene snijpunt door de as van projectie getrokken wordt, niet door het andere snijpunt, dan zullen de lijnen in de ruimte elkander kruisen, en niet snijden.

In fig. 17 snijden de lijnen (P'Q', P''Q'') en (R'S', R''S'') elkander niet, maar kruisen zich; want de loodlijn, die uit W'' op de as van projectie kan getrokken worden, gaat niet door V'; W'' en V' zijn dus niet de projectiën van een zelfde punt in de ruimte (§ 24). De punten (V', V'') en (V', v'') uit beide lijnen, hebben wel dezelfde horizontale projectie V', maar zij liggen op verschillende afstanden van het horizontale vlak. Evenzoo hebben de punten (W', W'') en (w', W'') wel dezelfde verticale projectie W'', maar zij liggen op verschillende afstanden van het verticale vlak.

§ 40. Is HS (fig. 18) het horizontale, VS het verticale vlak van projectie en B*B* een willekeurig vlak in de ruimte, dan zal B'*B* de horizontale, en B''*B* de verticale doorgang van dit vlak wezen.

(*) Al hetgeen van § 37 tot hiertoe over de projectiën van evenwijdige en elkander snijdende of kruisende lijnen gezegd is, is blijkbaar onafhankelijk van den hoek, waaronder de beide projectievlakken elkander snijden.

Worden nu de projectievlakken op de gewone wijze in elkander gebragt, dan komen de doorgangen van het vlak B*B* te vallen, zoo als in fig. 19 is aangewezen, en aldaar is nu ook dit vlak bepaald door de doorgangen B'*B* en B''*B*; men zou echter ook C'*B* en C''*B*, B'*B* en C''*B*, of C'*B* en B''*B*, als deze doorgangen kunnen beschouwen. Het is klaar, dat een vlak ook zoodanigen stand ten opzigte der projectievlakken kan hebben, dat in de constructie-figuur de doorgangen in elkanders verlengde komen te vallen.

De beide doorgangen van het vlak B*B* (fig. 18) maken scherpe hoeken met de as van projectie, wegens den hellenden stand, dien hetzelve ten opzigte der beide projectievlakken heeft. Om dezelfde reden, zal elk punt in het horizontale vlak als de horizontale projectie, en elk punt in het verticale vlak als de verticale projectie van eenig punt uit het vlak B*B* kunnen worden aangemerkt. Zijn nu de beide projectievlakken in elkander gebragt (fig. 19), en maken zij dus slechts één vlak uit, dan zal men in deze constructie-figuur elk punt kunnen beschouwen als de horizontale, of wel als de verticale projectie te zijn van eenig punt, gelegen in het vlak B'*B*B''.

§ 41. Gaat men de verschillende standen na, die een vlak kan hebben, ten opzigte der beide projectievlakken, dan zal men bevinden, dat als een vlak:

1°. Hellende is ten opzigte van beide projectievlakken (fig. 19), — de doorgangen scherpe hoeken met de as van projectie zullen maken.

2°. Loodregt is op het horizontale vlak, — de verticale doorgang loodregt op de as van projectie zal wezen, en de horizontale doorgang een' scherpen hoek met dezelve zal maken.

3°. Loodregt is op het verticale vlak, — de horizontale doorgang loodregt op de as van projectie zal wezen, en de verticale doorgang een' scherpen hoek met dezelve zal maken.

4°. Loodregt is op beide projectievlakken, of op de as van projectie, — de beide doorgangen in elkanders verlengde, en loodregt op de as van projectie zullen wezen.

5°. Evenwijdig is aan het verticale vlak, — de horizontale doorgang evenwijdig aan de as van projectie zal wezen, en de verticale doorgang niet bestaan zal.

6°. Evenwijdig is aan het horizontale vlak, — de verticale doorgang evenwijdig aan de as van projectie zal wezen, en de horizontale doorgang niet bestaan zal.

7°. Evenwijdig is aan de as van projectie, terwijl het beide projectievlakken snijdt, — de beide doorgangen evenwijdig zullen zijn aan de as van projectie.

In het eerste en zevende der bovengenoemde gevallen, zal men elk punt in de constructie-figuur als de horizontale, of als de verticale projectie, van eenig punt uit het vlak kunnen beschouwen. In het tweede en vijfde zal elk punt in de constructie-figuur wel als de verticale projectie, maar slechts elk punt van den horizontalen doorgang als de horizontale projectie van eenig punt kunnen worden aangemerkt. In het derde en zesde, zal men elk punt in de constructie-figuur wel als de horizontale projectie, maar slechts elk punt van den verticalen

doorgang als de verticale projectie van eenig punt kunnen aannemen. Eindelijk zal men in het vierde geval slechts elk punt, genomen in de doorgangen, als de horizontale, of als de verticale projectie, van eenig punt kunnen beschouwen.

Men oefene zich, om omgekeerd uit den stand van de doorgangen eens vlaks, dien van het vlak ten opzigte der projectievlakken te bepalen.

§ 42. Wanneer een vlak KS (fig. 20) door de as van projectie gaat, dan vallen deszelfs doorgangen in elkander in de as van projectie, en het vlak blijft alsdan, omdat men slechts ééne lijn AS kent, waardoor hetzelve gaan moet, geheel onbepaald; want de doorgang AS kan dan even zoo wel het vlak VS, of het vlak HS, als het vlak KS, of elk ander vlak voorstellen, dat door de lijn AS gaat. Wil men in dit geval dus het vlak KS bepalen, dan zal men een nieuw projectievlak moeten aannemen: zoo zal, bij voorbeeld, het vlak KS bepaald zijn door deszelfs doorgangen AS en AK met de vlakken VAS en VAH, of met de vlakken HAS en VAH.

Vallen dus de doorgangen van een vlak in elkander in de as van projectie, dan is dit vlak geheel onbepaald, en men zal nieuwe projectievlakken moeten aannemen, om hetzelve te bepalen.

§ 43. In elk der standen van een vlak ten opzigte der beide projectievlakken, die in § 41 zijn opgegeven, vindt men telkens twee doorgangen voor hetzelve; want ofschoon men in het vijfde en zesde geval slechts éénen doorgang verkrijgt, kan men den anderen beschouwen, als evenwijdig aan de as, op eenen oneindigen afstand van dezelve, te liggen. In elk dezer gevallen is dus het vlak bepaald, omdat men twee lijnen kent, waardoor hetzelve gaan moet. In § 42 echter vindt men slechts éénen doorgang, en het vlak blijft in dat geval onbepaald, ten zij men nieuwe projectievlakken aanneme, om hetzelve te bepalen.

§ 44. Dewijl de stelling van een vlak in de ruimte volkomen bepaald is, wanneer men deszelfs doorgangen kent op twee vlakken, die elkander snijden, een enkel geval (§ 42) uitgezonderd, zoo zal in het vervolg door een gegeven vlak verstaan worden een vlak, waarvan de beide doorgangen gegeven zijn, en als er gevraagd wordt, een vlak te bepalen, zal het er dus slechts op aankomen, de beide doorgangen van dat vlak te construeren.

Mogten bij het construeren van de doorgangen eens vlaks, dat aan bepaalde voorwaarden moet voldoen, die doorgangen in elkanders verlengde vallen, dan zullen zij dit echter in de ruimte niet doen, omdat zij daar in twee verschillende vlakken gelegen zijn, en het vlak zal dus bepaald wezen. Hiervan is echter het geval uitgezonderd, dat de doorgangen in elkander vallen, en beide in de as van projectie liggen; want dan zullen zij dit ook in de ruimte doen, en het vlak blijft dus onbepaald.

§ 45. Wanneer een vlak gegeven is door deszelfs doorgangen op twee elkander loodregt snijdende projectievlakken, die op de gewone wijze in elkander geslagen zijn, en men wil zich uit deze beide doorgangen van het vlak, den stand van het vlak in de ruimte, ten opzigte van de beide projectievlakken voorstellen, dan verbeelde men zich eerst het verticale vlak, met den verticalen doorgang daarin gelegen, om de as

van projectie weder opgeslagen, tot dat het loodregt sta op het horizontale vlak; vervolgens denke men zich door de beide doorgangen een vlak, dan zal dit het vlak in de ruimte wezen. Mogt een van de doorgangen, op eenen oneindigen afstand van de as van projectie, evenwijdig aan dezelve loopen, en dus niet bestaan, dan denke men zich door den bestaanden doorgang een vlak, evenwijdig aan dat projectievlak, waarop de doorgang niet bestaat.

§ 46. *Als eene lijn loodregt staat op een vlak, dan zullen de projectiën dezer lijn loodregt staan op de overeenkomstige doorgangen van het vlak.*

Is namelijk de lijn DE (fig. 21) loodregt op het vlak C'CC'', dan zullen de projectiën D'F' en D''G'' loodregt staan op de doorgangen C'C en C''C; want het projecterend vlak DF'' dezer lijn is loodregt op het vlak C'CC'', omdat dit projecterend vlak door de lijn DE gaat, die loodregt staat op het hellende vlak, en daar nu ook het projecterend vlak DF' loodregt staat op het projectievlak HS, zoo heeft men twee vlakken, C'CC'' en HS, die loodregt staan op een zelfde vlak DF'; derzelver gemeene doorsnede, dat is de horizontale doorgang C'C, staat dus loodregt op het vlak DF', en derhalve ook op de lijn F'D', die de projectie is der lijn DE op het vlak HS.

Op dezelfde wijze wordt betoogd, dat D''G'', die de projectie is van de lijn DE op het vlak VS, loodregt staat op den anderen doorgang C''C.

En als de projectiën eener lijn elk in het bijzonder loodregt staan op de overeenkomstige doorgangen van een vlak, dan staat ook de lijn in de ruimte loodregt op dat vlak.

Is namelijk de projectie D'F' (fig. 21) loodregt op den doorgang C'C, en de projectie D''G'' loodregt op den doorgang C''C, dan zal ook de lijn DE loodregt staan op het vlak C'CC''. Want het projecterend vlak DF' loodregt zijnde op het vlak HS, is de lijn F'C', die in het vlak HS ligt, en loodregt staat op de gemeene doorsnede dezer vlakken, loodregt op het vlak DF'; derhalve is ook het vlak C''CC', dat door de lijn F'C' gaat, loodregt op het projecterend vlak DF'. Op dezelfde wijze blijkt, dat het vlak C'CC'' loodregt staat op het projecterend vlak DG''. De twee projecterende vlakken DF' en DG'' dus loodregt staande op het vlak C'CC'', is ook derzelver gemeene doorsnede DE, dat is de lijn in de ruimte, loodregt op het vlak C'CC''.

§ 47. *Wanneer de doorgangen van twee vlakken met elk der projectievlakken, elkander snijden, zullen deze vlakken elkander snijden volgens eene lijn, welke in die snijpunten door elk der projectievlakken gaat.*

De doorgangen van de vlakken B''BB' en C''CC' (fig. 22), b. v., snijden elkander in E' en D''; omdat nu deze punten E' en D'' in beide vlakken gelegen zijn, is de lijn, die door E' en D'' gaat, de gemeene doorsnede der beide vlakken B''BB' en C''CC'; deze lijn gaat in E' door het vlak PQ, en in D'' door het vlak RQ.

§ 48. *Wanneer de doorgangen van twee vlakken met een der projectievlakken, aan elkander evenwijdig zijn, dan zullen deze vlakken elkander snijden volgens eene lijn, die evenwijdig is aan dat projectievlak.*

Zijn namelijk de doorgangen DD' en EE' (fig. 23) van de vlakken D''DD' en E''EE' met het vlak PQ, aan elkander evenwijdig, dan zal de gemeene doorsnede G''F dezer vlakken evenwijdig zijn aan het

vlak PQ; want trekt men, uit het punt G″, dat in beide vlakken ligt, en dus een punt der gemeene doorsnede is, eene lijn evenwijdig aan *EE′*, en dus ook evenwijdig aan het vlak PQ, dan zal deze lijn, daar zij tevens evenwijdig is aan *DD′*, in beide vlakken liggen, en derhalve hunne gemeene doorsnede wezen.

§ 49. *Wanneer de doorgangen van twee vlakken met elk der projectievlakken, aan elkander evenwijdig loopen, zonder evenwijdig te zijn aan de as van projectie, dan zijn ook deze vlakken aan elkander evenwijdig.*

Zijn namelijk de doorgangen *FF′* en *FF″* (fig. 24) evenwijdig met de doorgangen *GG′* en *GG″*, dan zullen de vlakken F′*FF*″ en G′*GG*″ ook aan elkander evenwijdig zijn; want als twee lijnen, die elkander snijden, evenwijdig zijn met twee lijnen, die elkander insgelijks snijden, dan zal het vlak, waarin de twee eerste lijnen liggen, evenwijdig zijn met het vlak, dat door de twee andere bepaald wordt.

En als twee vlakken evenwijdig zijn, moeten de doorgangen dezer vlakken met elk der projectievlakken, aan elkander evenwijdig zijn, omdat twee evenwijdige vlakken door een derde vlak, volgens evenwijdige lijnen gesneden worden.

§ 50. *Wanneer de doorgangen van twee vlakken evenwijdig zijn aan de as van projectie, en de doorgangen dezer vlakken met een derde vlak elkander snijden, dan snijden ook de twee vlakken elkander, en wel volgens eene lijn, die evenwijdig is aan de as van projectie, en dus ook aan de beide projectievlakken.*

Zijn, b. v., de doorgangen H′H′, H″H″ en I′I′, I″I″ van de vlakken H′H″ en I′I″ (fig. 25 en 26) evenwijdig aan de as SQ, en snijden de doorgangen H′H″ en I′I″ van deze vlakken met een derde vlak RSP, elkander in een punt L, dan zullen deze vlakken elkander snijden, en hunne gemeene doorsnede LM zal evenwijdig zijn aan de as van projectie; want trekt men uit het punt L, dat in beide vlakken ligt, en dus een punt der gemeene doorsnede is, eene lijn, evenwijdig aan I′I′, en dus ook evenwijdig aan SQ, dan zal deze lijn, daar zij tevens evenwijdig is aan H′H′, in beide vlakken liggen, en derhalve hunne gemeene doorsnede wezen.

§ 51. *Wanneer de doorgangen van twee vlakken evenwijdig zijn aan de as van projectie, dan zullen deze vlakken evenwijdig loopen, ingeval de doorgangen dezer vlakken met een derde vlak, insgelijks evenwijdig loopen.*

Zijn, b. v., de doorgangen H′H′, H″H″ en I′I′, I″I″ van de vlakken H′H″ en I′I″ (fig. 27) evenwijdig aan de as SQ, en zijn de doorgangen H′H″ en I′I″ van deze vlakken met een derde vlak RSP, insgelijks evenwijdig, dan zijn ook de vlakken H′H″ en I′I″ aan elkander evenwijdig; want H′H′ en H′H″ zijn evenwijdig aan I′I′ en I′I″, en dus ook (§ 49) de vlakken, die door deze lijnen gebragt kunnen worden.

Het is verder klaar, dat ook de evenredigheid H′I′ : I′S = H″I″ : I″S de evenwijdigheid der doorgangen H′H″ en I′I″, en dus ook de evenwijdigheid der vlakken H′H″ en I′I″ zal aantoonen.

Hieruit volgt dus, dat als in eenige constructie-figuur de doorgangen H′H′, H″H″ en I′I′, I″I″ (fig. 28) van twee vlakken evenwijdig zijn aan de as van projectie, en men uit eenig punt S dezer as twee lijnen

SR en SP trekt, het al of niet bestaan der evenredigheid $H'I' : I'S = H''I'' : I''S$ zal aantoonen, of deze vlakken al of niet evenwijdig loopen (*).

§ 52. Na de leerwijze der projectiën alzoo verklaard te hebben, gaan wij thans over tot derzelver toepassing op het oplossen van alle zoodanige werkstukken, als waartoe de onderlinge standen van punten, lijnen en vlakken in de ruimte aanleiding geven. Om zich de daartoe vereischte constructiën eigen te maken, zal het noodig zijn, dat men die zelf op willekeurig gekozene gegevens toepast en behoorlijk uitvoert; hierdoor zal men tevens in staat worden gesteld, om de werkstukken tot oefening, die achter dit werkje voorkomen, op te lossen en te construeren.

(*) Al hetgeen van § 46 tot hiertoe over de vlakken gezegd is, is blijkbaar onafhankelijk van den hoek, dien de beide projectievlakken met elkander maken.

OPLOSSING VAN WERKSTUKKEN, BETREKKELIJK DE REGTE LIJN EN HET PLATTE VLAK IN DE RUIMTE.

§ 53. Werkstuk. *Eene regte lijn te construeren, die door twee gegevene punten gaat.*

Dewijl de projectiën eener regte lijn mede regte lijnen zijn, en de projectiën der gegevene punten in de gelijknamige projectiën der gevraagde lijn moeten liggen, zoo zal men, om de projectiën der gevraagde lijn te bekomen, de gelijknamige projectiën der gegevene punten slechts door regte lijnen behoeven te vereenigen.

Zijn, b. v., (P′, P″) en (Q′, Q″) (fig. 29) de gegevene punten, dan zal de onbepaalde lijn P′Q′ de horizontale, en de onbepaalde lijn P″Q″ de verticale projectie wezen van de regte lijn, die door deze twee gegevene punten gaat.

Om dus eene regte lijn te construeren, die door twee gegevene punten gaat, vereenigt men de gelijknamige projectiën der gegevene punten door regte lijnen, dan zullen deze lijnen de projectiën der begeerde lijn wezen.

§ 54. Werkstuk. *De beide projecterende vlakken van eene gegevene lijn te construeren.*

Dewijl in het algemeen de projectie eener lijn de doorsnede is van derzelver projecterend vlak met het vlak van projectie (§ 16), zoo zal de horizontale projectie der lijn, de horizontale doorgang wezen van het projecterend vlak op het horizontale vlak; het punt, waar deze doorgang de as snijdt, is een punt van den verticalen doorgang, en daar dit projecterend vlak loodregt is op het horizontale vlak, moet deszelfs verticale doorgang loodregt op de as staan (§ 41); trekt men dus uit dit snijpunt eene loodlijn op de as, dan is deze lijn de verticale doorgang van het projecterend vlak op het horizontale vlak.

Evenzoo is de verticale projectie der lijn de verticale doorgang van derzelver projecterend vlak op het verticale vlak, en trekt men uit het snijpunt van dezen doorgang met de as, eene loodlijn op dezelve, dan zal men den horizontalen doorgang van dit projecterend vlak bekomen.

Is, b. v., (E′F′, E″F″) (fig. 30) de gegevene lijn, dan zal D′CC″ het projecterend vlak dezer lijn op het horizontale vlak, en C″DD′ derzelver projecterend vlak op het verticale vlak wezen.

Om dus de projecterende vlakken eener gegevene lijn te construeren, verlengt men de projectiën der lijn tot aan de as, en trekt uit de punten, waar deze de as snijden, loodlijnen op dezelve.

§ 55. Wanneer eene der projectiën eener gegevene lijn evenwijdig is aan de as van projectie, dan zal het projecterend vlak dezer lijn op

dat projectievlak, evenwijdig zijn aan het andere projectievlak, en dus slechts éénen doorgang hebben.

Zijn beide projectiën eener lijn evenwijdig aan de as van projectie, dan zijn beide projecterende vlakken dezer lijn evenwijdig aan de projectievlakken, en hebben dus elk slechts éénen doorgang.

Is eene der beide projectiën eener lijn een enkel punt, dan is een van derzelver projecterende vlakken onbepaald, en men kan dus voor een' der doorgangen van dat vlak elke lijn aannemen, die door dit punt gaat.

§ 56. Werkstuk. *De punten te bepalen, waarin eene gegevene lijn elk der projectievlakken ontmoet.*

Wanneer men eene willekeurige loodlijn door de as van projectie trekt, die elk der projectiën van de gegevene lijn snijdt, dan zal men door die snijpunten telkens een punt der gegevene lijn bepaald hebben, dat zoo ver van het horizontale vlak afstaat, als de afstand van deszelfs verticale projectie tot aan de as bedraagt; om dus het punt te bepalen, waar de lijn het horizontale vlak ontmoet, of het punt, dat de lijn en het horizontale vlak met elkander gemeen hebben, moet men zoodanige loodlijn door de as van projectie trekken, dat de afstand van dit punt tot het horizontale vlak, dat is de afstand van deszelfs verticale projectie tot de as, nul wordt, en dit geschiedt klaarblijkelijk, door uit het punt, waar de verticale projectie der lijn de as van projectie snijdt, eene loodlijn op dezelve te trekken. Het snijpunt dezer loodlijn met de horizontale projectie der lijn, zal nu een punt aanwijzen, dat in de gegevene lijn ligt, omdat deszelfs beide projectiën in die der lijn gelegen zijn, en het zal tevens in het horizontale vlak liggen, omdat deszelfs verticale projectie in de as van projectie valt; het zal dus het punt zijn, waar de gegevene lijn het horizontale vlak ontmoet.

Dewijl de afstand van een punt tot het verticale vlak aangewezen wordt door den afstand, dien deszelfs horizontale projectie tot de as heeft, zal men, om het punt te bepalen, waar de lijn het verticale vlak ontmoet, of het punt, dat de lijn en het verticale vlak met elkander gemeen hebben, weder zoodanige loodlijn door de as van projectie moeten trekken, dat de afstand van dit punt tot het verticale vlak, dat is de afstand van deszelfs horizontale projectie tot de as, nul wordt, en dit geschiedt klaarblijkelijk, door uit het punt, waar de horizontale projectie der lijn de as snijdt, eene loodlijn op dezelve te trekken. Het snijpunt dezer loodlijn met de verticale projectie der lijn zal alsdan een punt aanwijzen, dat in de gegevene lijn ligt, omdat deszelfs beide projectiën in die der lijn gelegen zijn, en het zal tevens in het verticale vlak liggen, omdat deszelfs horizontale projectie in de as valt; het zal dus het punt zijn, waar de gegevene lijn het verticale vlak ontmoet.

Is, b. v., (E'F', E''F'') (fig. 30) de gegevene lijn, en wil men het punt bepalen, waar deze lijn het horizontale vlak ontmoet, dan trekt men uit het punt D, waar de verticale projectie der lijn de as van projectie snijdt, eene loodlijn DD' op dezelve; het punt D', waar deze loodlijn de horizontale projectie der lijn snijdt, is alsdan het ontmoetingspunt der gegevene lijn met het horizontale vlak.

Wil men het punt bepalen, waar deze lijn het verticale vlak ontmoet, dan trekt men uit het punt C, waar de horizontale projectie der lijn de as van projectie snijdt, eene loodlijn CC'' op dezelve; het punt C'', waar deze loodlijn de verticale projectie der lijn snijdt, is alsdan het ontmoetingspunt der gegevene lijn met het verticale vlak.

Om dus het punt te vinden, waar eene gegevene lijn het horizontale vlak ontmoet, trekt men uit het punt, waar de verticale projectie der lijn de as van projectie snijdt, eene loodlijn op dezelve; het snijpunt van deze loodlijn met de horizontale projectie der lijn, is het punt, waar de gegevene lijn het horizontale vlak doorsnijdt.

En om het punt te vinden, waar eene lijn het verticale vlak ontmoet, trekt men uit het punt, waar de horizontale projectie der lijn de as snijdt, eene loodlijn op dezelve; het snijpunt van deze loodlijn met de verticale projectie der lijn, is dan het punt, waar de gegevene lijn het verticale vlak doorsnijdt.

§ 57. Werkstuk. *Den afstand van twee gegevene punten te construeren.*

Dewijl de afstanden bekend zijn, waarop de beide punten van het horizontale vlak afstaan, of de lengten van derzelver projecterende lijnen op dit vlak (§ 26), zou men, door uit elk der horizontale projectiën van de beide punten, loodlijnen gelijk aan deze afstanden, op het horizontale vlak op te rigten, en de uiteinden dezer loodlijnen te vereenigen, de begeerde lijn verkrijgen. Daar men dit echter in de ruimte niet doen kan, maar de constructiën in het vlak van teekening moet uitvoeren, verbeeldt men zich (fig. 31), dat het projecterend vlak der lijn op het horizontale vlak, waarin de projecterende lijnen van derzelver uiteinden gelegen zijn, en dat het horizontale vlak (§ 16) volgens de horizontale projectie der lijn snijdt, om de horizontale projectie wordt nedergeslagen op het horizontale vlak, dan zullen deze projecterende lijnen, gedurende die omwenteling, altijd loodregt blijven op de horizontale projectie, en tevens dezelfde lengte behouden; dit alles zal natuurlijk nog plaats hebben, wanneer zij in het horizontale vlak zijn nedergekomen. Worden dus in de constructie-figuur, uit de horizontale projectiën der gegevene punten, op de lijn, die dezelve vereenigt, loodlijnen opgerigt, die gelijk zijn aan de afstanden der punten tot het horizontale vlak, dan zal de lijn, die de uiteinden dezer loodlijnen vereenigt, den begeerden afstand aanwijzen.

Zijn, b. v. (C', C'') en (D', D'') (fig. 32) de twee gegevene punten, dan is $C'D'$ de horizontale projectie der lijn, die deze twee punten in de ruimte vereenigt, en volgens § 26 zijn $C''C$ en $D''D$ de afstanden, waarop zij van het horizontale vlak staan. Rigt men dus op $C'D'$, uit C' eene loodlijn $C'C = C''C$, en uit D' eene loodlijn $D'D = D''D$ op, dan zal de lijn CD de afstand wezen van de punten (C', C'') en (D', D'').

Om dus den afstand van twee gegevene punten te vinden, rigte men uit hunne horizontale projectiën, op de lijn, die dezelve vereenigt, loodlijnen op, en make die gelijk aan de afstanden, die de punten van het horizontale vlak hebben, dan zal de lijn, die de uiteinden dezer loodlijnen vereenigt, den begeerden afstand aanwijzen.

§ 58. Trekt men uit het punt D (fig. 32) eene lijn DE, evenwijdig aan C'D', dan is DE = C'D' en CE = DC, zoodat CE = CC' − D'D = C'C − D'D is.

Het afstand van twee punten is dus ook gelijk aan de hypothenusa van eenen regthoekigen driehoek, waarvan de eene regthoekszijde de verticale projectie is van de lijn, die de twee gegevene punten vereenigt, en de andere regthoekszijde het verschil is der afstanden, waarop deze punten van het horizontale vlak staan.

§ 59. Ziet men de uiteinden der beide punten tot het verticale vlak, zij de uitgen van dezeven projecterende lijnen op dit vlak, bekend zijn § 26, dan men van deze uitgen van de verticale projectie der lijn den begeerden afstand construeren. Verondet men nu nadrukkelijk, (fig. 31) dat het projecterend vlak der lijn op het verticale vlak, dat door de projecterende lijnen van dezeven uitenden gaat, en het verticale vlak uitgeen de verticale projectie der lijn snijdt, een de verticale projectie der lijn rechtgeteekend wordt op het verticale vlak, dan vallen de projecterende lijnen van de uitenden der lijn, geteurende die conventeling, altijd loodlijn lijnen op de verticale projectie, en tevens dezelfde lengte hebbenden. Worden dus in de constructie-figuur, uit de verticale projectiën der gegevene punten, op de lijn, die dezelve vereenigt, loodlijnen opgerigt, die gelijk zijn aan de afstanden der punten tot het verticale vlak, dan zal de lijn, die de uiteinden dezer loodlijnen vereenigt, ook den begeerden afstand aanwijzen.

Zijn weder, b. v., C', C'', en D', D'', (fig. 32) de twee gegevene punten, dan is C''D'' de verticale projectie van de lijn, die deze twee punten in de ruimte vereenigt, en volgens § 26 zijn C'C en D'D de afstanden, waarop zij van het verticale vlak staan. Rigt men dus op C''D'' uit C'' eene loodlijn C''C = C'C, en uit D'' eene loodlijn D''D = D'D op, dan zal ook de lijn CD de afstand wezen van de punten (C', C'') en (D', D'').

Om dus den afstand van twee gegevene punten te vinden, rigte men uit hunne verticale projectiën, op de lijn, die dezelve vereenigt, loodlijnen op, en make die gelijk aan de afstanden, die de punten van het verticale vlak hebben, dan zal de lijn, die de uiteinden dezer loodlijnen vereenigt, den begeerden afstand aanwijzen.

§ 60. Trekt men uit het punt C (fig. 32) eene lijn CF, evenwijdig aan C''D'', dan is CF = C''D'' en D''F = C''C, zoodat DF = D''D − C''C = D'D − C'C is.

De afstand van twee punten is dus ook gelijk aan de hypothenusa van eenen regthoekigen driehoek, waarvan de eene regthoekszijde de verticale projectie is van de lijn, die de gegevene punten vereenigt, en de andere regthoekszijde het verschil is der afstanden, waarop deze punten van het verticale vlak staan.

§ 61. Tot hiertoe werd ondersteld, dat de punten, waarvan men den afstand begeerde, aan denzelfden kant van elk der projectievlakken gelegen waren, en dat dus ook de projecterende lijnen der punten van denzelfden kant op de projectievlakken vielen. Liggen echter twee punten C en D (fig. 33) aan verschillenden kant van het horizontale vlak, dan vallen ook de projecterende lijnen CC' en DD' van verschillenden

kant op dit projectievlak, en dan zullen, na het nederslaan van het projecterend vlak dezer lijn om derzelver horizontale projectie op het horizontale vlak, deze projecterende lijnen aan verschillenden kant van de horizontale projectie gelegen wezen.

Wil men alzoo den afstand vinden van de punten (C′, C″) en (D′, D″) (fig. 34), waarvan het eerste boven, en het tweede beneden het horizontale vlak gelegen is, dan moet men, na C′D′ getrokken te hebben, de loodlijn C′C = C″C aan den eenen, en de loodlijn D′D = D″D aan den anderen kant van de horizontale projectie uitzetten, en vervolgens de lijn CD trekken, die dan de begeerde afstand zal wezen.

Om dus uit de horizontale projectie eener lijn, derzelver werkelijke lengte te bepalen, zal men de lengten der projecterende lijnen van derzelver uiteinden aan denzelfden, of aan verschillenden kant van de horizontale projectie moeten uitzetten, naargelang deze uiteinden aan denzelfden, of aan verschillenden kant van het horizontale vlak gelegen zijn.

§ 62. Trekt men uit het punt D (fig. 34) de lijn DE evenwijdig aan C′D′, dan is DE = C′D′ en C′E = D′D, zoodat CE = C′C + C′E = C″C + D″D is. De afstand der twee gegevene punten is dus hier gelijk aan de hypothenusa eens regthoekigen driehoeks, waarvan de eene regthoekszijde de horizontale projectie is van de lijn, die de twee punten vereenigt, en de andere regthoekszijde de som der afstanden, die de punten tot het horizontale vlak hebben. Beschouwt men echter de projecterende lijn DD′ (fig. 33), die beneden het horizontale vlak ligt, als negatief ten opzigte van de projecterende lijn CC′, die boven het horizontale vlak gelegen is, dan heeft men in fig. 34, ook CE = C″C — (— D″D), en in dit opzigt gaat ook hier de in § 58 gegeven regel, vóor het vinden van den afstand van twee gegevene punten, woordelijk door.

§ 63. Liggen de punten, waarvan men den afstand zoekt, aan verschillenden kant van het verticale vlak, dan zullen de projecterende lijnen dezer punten aan verschillenden kant van het verticale vlak gelegen wezen, en deze projecterende lijnen zullen dus ook aan verschillenden kant van de verticale projectie vallen, wanneer de lijn, die de gegevene punten vereenigt, om derzelver verticale projectie wordt nedergeslagen op het verticale vlak. Om zich hiervan te overtuigen, behoeft men slechts het vlak HS (fig. 33) als het verticale vlak te beschouwen, waarop de punten C en D geprojecteerd zijn.

Om dus uit de verticale projectie eener lijn, derzelver werkelijke lengte te bepalen, zal men de projecterende lijnen van derzelver uiteinden aan denzelfden, of aan verschillenden kant van de verticale projectie moeten uitzetten, naargelang deze uiteinden aan denzelfden, of aan verschillenden kant van het verticale vlak gelegen zijn.

Het is klaar, dat ook hier de aanmerking, in de vorige § vervat, kan worden toegepast.

§ 64. Is eene lijn, die twee gegevene punten vereenigt, evenwijdig aan een der projectievlakken, dan zal men, blijkens het te voren reeds opgemerkte (§ 32), nimmer eene der boven opgegevene constructiën behoeven aan te wenden, om derzelver lengte te bepalen; want deze zal alsdan gelijk zijn aan de projectie op dat vlak, waarmede de lijn evenwijdig loopt.

§ 65. Het hulpmiddel, dat hier is aangewend, om den afstand van twee gegevene punten te bepalen, wordt genoemd: *het omslaan eener lijn om eene van derzelver projectiën op het overeenkomstige projectievlak*; hetzelve kan ook bij de oplossing van andere werkstukken van dienst zijn.

Dit omslaan geschiedt in het algemeen, door twee willekeurige punten in de gegevene lijn aan te nemen, vervolgens uit de projectiën dezer punten loodlijnen op de gelijknamige projectie der lijn op te rigten, en deze loodlijnen gelijk te maken aan de projecterende lijnen dezer punten, of gelijk aan derzelver afstanden tot het vlak, waarop men de lijn wil nederslaan; de onbepaalde lijn, die door de uiteinden dezer loodlijnen getrokken wordt, zal dan de nedergeslagene lijn wezen.

Hierbij valt echter nog op te merken, dat men, volgens hetgeen in § 61 en § 63 gezegd is, bovengenoemde loodlijnen aan denzelfden, of aan verschillenden kant van de projectie der lijn zal moeten oprigten, naargelang de beide aangenomene punten gelegen zijn aan denzelfden, of aan verschillenden kant van dat projectievlak, waarop de lijn moet worden nedergeslagen.

Wil men, b. v., de lijn, die in fig. 35 door derzelver projectiën gegeven is, om derzelver horizontale projectie nederslaan op het horizontale vlak, dan neemt men in deze lijn twee willekeurige punten (X', X'') en (Y', Y'') aan, rigt uit X' en Y' op $X'Y'$, aan denzelfden kant, de loodlijnen $X'X = X''X$ en $Y'Y = Y''Y$ op, en trekt door de punten X en Y eene onbepaalde lijn, dan zal deze de lijn zijn, die om derzelver horizontale projectie op het horizontale vlak is nedergeslagen.

Het zal wel geene verklaring behoeven, hoe dezelfde lijn om derzelver verticale projectie wordt nedergeslagen op het verticale vlak. Zie fig. 35.

§ 66. Laat men uit een willekeurig punt Z (fig. 35) van de op het horizontale vlak nedergeslagene lijn XY, eene loodlijn ZZ' op $X'Y'$ vallen, dan is Z' de horizontale projectie, en dus Z'' (§ 23) de verticale projectie van het punt Z in de ruimte; men heeft dus ook $ZZ'' = ZZ'$. Hieruit blijkt, hoe men, als de nedergeslagene lijn op het horizontale vlak benevens derzelver horizontale projectie gegeven is, de verticale projectie dezer lijn kan construeren. Op gelijke wijze zal men de horizontale projectie eener lijn kunnen vinden, wanneer de nedergeslagene lijn op het verticale vlak en derzelver verticale projectie gegeven is.

§ 67. Dewijl de projecterende lijnen van de punten eener lijn onderling evenwijdig zijn, is het klaar, dat de lijnen $X'Z'$ en $X''Z''$ door de punten X', Y', Z' en X'', Y'', Z'' in dezelfde reden gedeeld zijn, als waarin de lijn XZ verdeeld wordt door de punten X, Y, Z. Hieruit volgt dus, hoe men den afstand tusschen twee punten in de ruimte kan verdeelen, in gegevene reden, of in een aantal gelijke deelen.

§ 68. De punten, waarin eene lijn hare projectiën snijdt, zullen de snijpunten zijn van deze lijn met de projectievlakken. Verlengt men b. v. de omgeslagene lijn XZ (fig. 35) op het horizontale vlak, tot dat zij $X'Z'$ snijdt, en even zoo de omgeslagene lijn XZ op het verticale vlak, tot dat zij $X''Z''$ snijdt, dan zullen deze snijpunten klaarblijkelijk de punten zijn, waarin de lijn XZ het horizontale en verticale vlak ontmoet. Om dus eene lijn om eene van derzelver projectiën op het overeenkomstige projectievlak neder te slaan, kan men gemakshalve

voor een der beide punten, die men hiertoe moet aannemen, ook het punt gebruiken, waar deze lijn het projectievlak snijdt.

§ 69. Werkstuk. *Den hoek te bepalen, dien eene gegevene lijn met elk der beide projectievlakken maakt.*

De hoek, dien eene lijn maakt met een vlak, is de hoek, dien deze lijn maakt met derzelver projectie op dat vlak. Wordt nu eene lijn om derzelver projectie nedergeslagen op het overeenkomstige projectievlak, dan zal, gedurende die beweging, de hoek, dien de lijn met derzelver projectie maakt, niet veranderen, en dus nog dezelfde zijn, wanneer de lijn in het vlak van projectie is nedergekomen.

Is, b. v., (E'F', E''F'') (fig. 36) de gegevene lijn, en wil men den hoek bepalen, dien deze lijn maakt met het horizontale vlak, dan slaat men deze lijn om derzelver horizontale projectie neder op het horizontale vlak (§ 65). Daartoe bepaalt men gemakshalve eerst het punt D', waar de lijn het horizontale vlak ontmoet (§ 56), en rigt vervolgens uit een willekeurig punt E' van de horizontale projectie, eene loodlijn E'E = *E*E'' op, dan zal D'E de nedergeslagene lijn wezen, en dus ED'E' de gevraagde hoek.

Om den hoek te bepalen, dien de lijn maakt met het verticale vlak, slaat men de lijn om derzelver verticale projectie neder op het verticale vlak (§ 65), waartoe men weder gemakshalve eerst het punt C'' bepaalt, waar de lijn het verticale vlak ontmoet (§ 56), en rigt vervolgens uit een willekeurig punt E'' van de verticale projectie eene loodlijn E''E = *E*E' op, dan zal C''E de nedergeslagene lijn, en EC''E'' de begeerde hoek wezen.

Om derhalve den hoek te bepalen, dien eene gegevene lijn maakt met het horizontale vlak, slaat men de lijn om derzelver horizontale projectie neder op het horizontale vlak, dan zal de hoek, onder welken de nedergeslagene lijn derzelver horizontale projectie snijdt, de begeerde wezen.

En om den hoek te bepalen, dien eene gegevene lijn maakt met het verticale vlak, slaat men de lijn om derzelver verticale projectie neder op het verticale vlak, dan zal de hoek, onder welken de nedergeslagene lijn derzelver verticale projectie snijdt, de begeerde zijn.

§ 70. Trekt men uit een willekeurig punt E, (fig. 36) van de nedergeslagene lijn op het horizontale vlak, eene lijn EG, evenwijdig aan de horizontale projectie E'F', dan zal klaarblijkelijk hoek GEH = hoek ED'E' wezen. Mogt het dus gebeuren, dat in eenige constructie-figuur het punt D', waar de lijn het horizontale vlak ontmoet, buiten de teekening viel, dan zou men slechts de lijn op het horizontale vlak behoeven neder te slaan, zoo als in § 65 geleerd is, door namelijk uit twee willekeurige punten E' en F' van de horizontale projectie, de loodlijnen E'E = *E*E'' en F'F = F''*F* op te rigten, en de punten E en F te vereenigen; en om dan den hoek te bepalen, dien de gegevene lijn maakt met het horizontale vlak, zou men uit een willekeurig punt E van de nedergeslagene lijn, eene lijn EG evenwijdig aan de horizontale projectie kunnen trekken, als wanneer hoek GEH de begeerde zou wezen.

§ 71. Trekt men uit een willekeurig punt E (fig. 36) van de nedergeslagene lijn op het verticale vlak, eene lijn EK, evenwijdig aan de

verticale projectie E″F″, dan zal klaarblijkelijk hoek IEK = hoek EC″E″ wezen. Mogten de gegevens dus zoodanig zijn, dat in eenige constructie-figuur het punt C″, waar de lijn het verticale vlak snijdt, buiten de teekening viel, dan zou men slechts de lijn op het verticale vlak behoeven neder te slaan, zoo als in § 65 geleerd is, door namelijk uit twee willekeurige punten E″ en F″ van de verticale projectie, de loodlijnen E″E = *E*E′ en F″F = *F*F′ op te rigten, en de punten E en F te vereenigen; en om dan den hoek te bepalen, dien de gegevene lijn maakt met het verticale vlak, zou men uit een willekeurig punt E van de nedergeslagene lijn, eene lijn EK, evenwijdig aan de verticale projectie kunnen trekken, als wanneer hoek IEK de begeerde zou wezen.

§ 72. Werkstuk. *Den hoek te construeren, welken twee gegevene lijnen, die elkander in een punt van de ruimte snijden, met elkander maken.*

Neemt men in elk der lijnen een willekeurig punt aan, en vereenigt men dezelve, dan ontstaat er een driehoek, waarin de gevraagde hoek gelegen is, en wel tegen over de lijn, die de twee aangenomene punten vereenigt. Construeert men dus de zijden van dezen driehoek, en vervolgens den driehoek zelven, dan zal men den gevraagden hoek bekomen.

Zijn, b. v., (C′F′, C″F″) en (D′F′, D″F″) (fig. 37) de twee gegevene lijnen, die elkander in het punt (F′, F″) snijden, en wil men den hoek bepalen, dien deze lijnen met elkander maken, dan neemt men in de eene lijn een willekeurig punt (E′, E″), en in de andere een willekeurig punt (G′, G″) aan; door deze punten te vereenigen, verkrijgt men de lijn (E′G′, E″G″). Construeert men nu (§ 58) de werkelijke lengten van de lijnen (E′G′, E″G″), (E′F′, E″F″) en (G′F′, G″F″), en beschrijft men den driehoek E′FG, die deze lengten E′G, E′F en G′F tot zijden heeft, dan zal hoek E′FG de gevraagde hoek wezen.

§ 73. Werkstuk. *De doorsnede van twee gegevene vlakken te construeren.*

Door de doorsnede van twee vlakken te construeren, verstaat men, zoo als reeds vroeger is opgemerkt, de beide projectiën van deze doorsnede te bepalen.

Snijden nu van de beide vlakken B′*B*B″ en C′*C*C″ (fig. 38) de horizontale, zoowel als de verticale doorgangen, elkander, dan zijn deze snijpunten E′ en D″ (§ 47) punten van de gemeene doorsnede dezer vlakken, en men zal dus slechts de beide projectiën behoeven te bepalen van de lijn, die door deze twee punten kan getrokken worden.

Daar nu D″ in het verticale vlak ligt, is *D* (§ 28) deszelfs horizontale projectie, en van E′, als in het horizontale vlak gelegen zijnde, is E′ zelf de horizontale projectie; derhalve is (§ 53) *D*E′ de horizontale projectie van de lijn, die door de punten D″ en E′ gaat, of van de gemeene doorsnede der beide vlakken.

Daar verder E′ in het horizontale vlak ligt, is *E* (§ 28) deszelfs verticale projectie, en van D″, als in het verticale vlak gelegen zijnde, is D″ zelf de verticale projectie; derhalve is (§ 53) *E*D″ de verticale projectie van de lijn, die door de punten E′ en D″ gaat, of van de gemeene doorsnede der beide vlakken.

Om dus de doorsnede te construeren van twee vlakken, waarvan de horizontale en verticale doorgangen elkander snijden, laat men uit het snijpunt van de verticale doorgangen eene loodlijn neder op de as van projectie, en

vereenigt het voetpunt dezer loodlijn met het snijpunt der horizontale doorgangen, dan zal deze lijn de horizontale projectie van de gevraagde doorsnede wezen. Vervolgens laat men uit het snijpunt van de horizontale doorgangen eene loodlijn neder op de as van projectie, en vereenigt het voetpunt dezer loodlijn met het snijpunt der verticale doorgangen, dan zal deze lijn de verticale projectie der gevraagde doorsnede zijn.

§ 74. Loopen de horizontale doorgangen van twee vlakken aan elkander evenwijdig, terwijl de verticale elkander snijden, dan is reeds in § 48 aangetoond, dat de gemeene doorsnede dezer vlakken evenwijdig loopt aan het horizontale vlak.

Zijn, b. v., $D''DD'$ en $E''EE'$ (fig. 39) de twee gegevene vlakken, waarvan de horizontale doorgangen DD' en EE' evenwijdig zijn, terwijl de verticale doorgangen DD'' en EE'' elkander in het punt G'' snijden, dan moet hunne gemeene doorsnede door het punt G'' gaan, en evenwijdig loopen aan het horizontale vlak; deze gemeene doorsnede moet dus ook evenwijdig loopen aan de lijn DD', omdat die in het horizontale vlak, en tevens in een der gegevene vlakken ligt. Men heeft dus slechts eene lijn te construeren, die door een gegeven punt gaat, en evenwijdig loopt aan eene gegevene lijn, en hiertoe moet men (§ 37) de projectiën evenwijdig aan die der gegevene lijn, en (§ 53) door de gelijknamige projectiën van het gegeven punt trekken.

Daar nu (§ 28) G'' de verticale, en G de horizontale projectie van het punt G'' is, terwijl DD' en DE (§ 32) de horizontale en verticale projectiën van de lijn DD' zijn, zoo zal de lijn GH', die uit G evenwijdig aan DD' getrokken wordt, de horizontale projectie, en de lijn $G''H''$, die uit G'' evenwijdig aan de as van projectie getrokken wordt, de verticale projectie dezer gemeene doorsnede wezen.

Om dus de doorsnede te construeren van twee vlakken, waarvan de horizontale doorgangen evenwijdig loopen, en de verticale elkander snijden, laat men uit het snijpunt van de verticale doorgangen eene loodlijn neder op de as van projectie, dan zal de lijn, die uit het voetpunt dezer loodlijn evenwijdig met de horizontale doorgangen getrokken wordt, de horizontale projectie van de doorsnede, en de lijn, die uit het snijpunt der verticale doorgangen, evenwijdig met de as van projectie getrokken wordt, de verticale projectie van de doorsnede wezen.

§ 75. Men kan in dit geval echter ook den regel van § 73 toepassen, door op te merken, dat het snijpunt der horizontale doorgangen hier op eenen oneindigen afstand ligt, en dus ook het voetpunt der loodlijn, die uit dit snijpunt op de as van projectie moet worden nedergelaten. Laat men alzoo uit het snijpunt G'' der verticale doorgangen eene loodlijn $G''G$ op de as van projectie neder, dan zal, volgens § 73, de horizontale projectie der gemeene doorsnede verkregen worden, door den voet G dezer loodlijn met het snijpunt der horizontale doorgangen te vereenigen; daar echter dit snijpunt op eenen oneindigen afstand gelegen is, moet de lijn, die uit G naar dit snijpunt gaat, noodzakelijk evenwijdig getrokken worden aan de horizontale doorgangen DD' en EE'. Verder moet, volgens § 73, om de verticale projectie der doorsnede te verkrijgen, het snijpunt G'' der verticale doorgangen vereenigd worden met het voetpunt der loodlijn, die uit het snijpunt der horizontale doorgangen

op de as van projectie wordt nedergelaten; daar echter de voet dezer loodlijn in de as van projectie op eenen oneindigen afstand ligt, moet de lijn, die het punt G″ met den voet dezer loodlijn vereenigt, noodzakelijk evenwijdig aan de as van projectie getrokken worden.

§ 76. Zijn de verticale doorgangen van twee vlakken evenwijdig, terwijl de horizontale elkander snijden, dan zal de gemeene doorsnede dezer vlakken evenwijdig loopen aan het verticale vlak.

Zijn, b. v., F′FF″ en G′GG″ (fig. 40) de twee gegevene vlakken, waarvan de verticale doorgangen FF″ en GG″ evenwijdig zijn, terwijl de horizontale doorgangen elkander snijden in het punt H′, dan zal de gemeene doorsnede dezer vlakken evenwijdig loopen aan het verticale vlak, en door het punt H′ gaan. Redeneert men nu op eene dergelijke wijze als in § 74, dan zal men bevinden, dat de verticale projectie der gemeene doorsnede verkregen wordt, door uit H′ eene loodlijn H′H op de as van projectie neder te laten, en uit den voet H dezer loodlijn de lijn HI″ evenwijdig aan de verticale doorgangen te trekken; en dat de horizontale projectie dezer gemeene doorsnede gevonden wordt, door uit H′ de lijn H′I′ evenwijdig aan de as van projectie te trekken.

Om dus de doorsnede te construeren van twee vlakken, waarvan de verticale doorgangen evenwijdig loopen, en de horizontale doorgangen elkander snijden, laat men uit het snijpunt van de horizontale doorgangen eene loodlijn neder op de as van projectie, dan zal de lijn, die uit het voetpunt dezer loodlijn evenwijdig met de verticale doorgangen getrokken wordt, de verticale projectie van de doorsnede, en de lijn, die uit het snijpunt van de horizontale doorgangen, evenwijdig met de as van projectie getrokken wordt, de horizontale projectie der doorsnede wezen.

Het is klaar, dat ook in dit geval de regel van § 73 zal doorgaan, wanneer men in aanmerking neemt, dat het snijpunt der verticale doorgangen hier op eenen oneindigen afstand ligt, en dus ook het voetpunt der loodlijn, die uit dit snijpunt op de as van projectie moet worden nedergelaten.

§ 77. Loopen de doorgangen van twee vlakken evenwijdig aan de as van projectie, dan is in § 50 aangetoond, dat zoo de vlakken elkander snijden, hunne gemeene doorsnede evenwijdig zal wezen aan de as van projectie, en dus ook aan de beide projectievlakken. De beide projectiën dezer lijn (§ 32) evenwijdig moetende zijn aan de as van projectie, komt het er dus slechts op aan, te bepalen, hoe ver één punt van dezelve van elk der projectievlakken afstaat.

Zijn nu, b. v., H′H″ en I′I″ (fig. 41) de twee gegevene vlakken, waarvan men de doorsnede wil bepalen, en heeft het in § 51 opgegeven kenmerk van evenwijdigheid niet plaats, dan neemt men, om een punt van de gemeene doorsnede te vinden, een nieuw projectievlak RSP aan (fig. 25), dat men loodregt door eenig punt S van de as van projectie laat gaan. Dit vlak snijdt de beide gegevene vlakken volgens de lijnen H′H″ en I′I″, en het snijpunt L dezer lijnen is dan een punt van de gemeene doorsnede der gegevene vlakken. Om dit punt ook in de constructie-figuur te bepalen, verbeeldt men zich, dat dit nieuwe projectievlak RSP, om deszelfs verticalen doorgang RS wentelt, tot dat het op het verticale vlak komt te liggen, dan zal de lijn PS, omdat

zij loodregt staat op RS, altijd in het horizontale vlak blijven, en na die omwenteling in het verlengde van SQ komen te vallen, terwijl de punten H′ en I′ cirkelbogen zullen beschrijven.

Trekt men dus door eenig punt S (fig. 41) van de as van projectie eene loodlijn op dezelve, en beschrijft men uit S met de stralen SH′ en SI′ cirkelbogen, die het verlengde van SQ in H′ en I′ snijden, dan zal, als men de lijnen H′H″ en I′I″ trekt, het snijpunt L dezer lijnen het begeerde punt van de gemeene doorsnede der gegevene vlakken wezen. Daar nu, gedurende de omwenteling van het vlak RSP om de lijn RS, het punt L, dat in dit vlak gelegen is, denzelfden afstand van het horizontale vlak behouden heeft, zoo zal men, om dien afstand te bepalen, slechts uit L eene loodlijn LL′ op PQ behoeven neder te laten. Verder is het klaar, dat L′S = LL′ den afstand zal aantoonen, waarop het punt L zich aanvankelijk van het verticale vlak bevonden heeft. Trekt men dus op den afstand SL″ = LL′ eene lijn L″L″, evenwijdig aan de as van projectie, dan zal L″L″ de verticale projectie der gevraagde doorsnede wezen; en trekt men op den afstand L′S = LL″ eene lijn L′L′, evenwijdig aan de as, dan zal L′L′ de horizontale projectie dezer doorsnede zijn.

§ 78. Men kan ook, om het punt L in de constructie-figuur te bepalen, zich verbeelden, dat het vlak RSP (fig. 25) om deszelfs horizontalen doorgang SP wentelt, tot dat het op het horizontale vlak komt te liggen, dan zal de lijn RS, omdat zij loodregt staat op PS, altijd in het verticale vlak blijven, en na die omwenteling in het verlengde van SQ komen te vallen, terwijl de punten H″ en I″ cirkelbogen zullen beschrijven.

Trekt men dus door eenig punt S (fig. 42) eene loodlijn op de as, en beschrijft men uit S met de stralen SH″ en SI″ cirkelbogen, die het verlengde van SQ in H″ en I″ snijden, dan zal, als men de lijnen H″H″ en I″I″ trekt, het snijpunt L dezer lijnen ook het begeerde punt van de gemeene doorsnede der gegevene vlakken wezen. Daar nu, gedurende de omwenteling van het vlak RSP om de lijn SP, het punt L, dat in dit vlak gelegen is, denzelfden afstand van het verticale vlak behouden heeft, zoo zal men, om dien afstand te bepalen, slechts uit L eene loodlijn LL″ op RQ behoeven neder te laten. Verder is het klaar, dat L″S = LL′ den afstand zal aantoonen, waarop het punt L zich aanvankelijk van het horizontale vlak bevonden heeft. Trekt men dus op den afstand SL′ = L″L eene lijn L′L′, evenwijdig aan de as van projectie, dan zal weder L′L′ de horizontale projectie der gevraagde doorsnede wezen; en trekt men op den afstand L″S = LL′ eene lijn L″L″, evenwijdig aan de as, dan zal ook weder L″L″ de verticale projectie van deze doorsnede wezen.

§ 79. Zoodra men de punten H″ en I″ (fig. 42) in de as SQ bepaald, en de lijnen H″H′ en I″I″ getrokken heeft, kan men deze lijnen aannemen als de nieuwe verticale doorgangen der gegevene vlakken, waarbij dan RSP als het nieuwe verticale vlak, en SP als de nieuwe as van projectie beschouwd moet worden. Dewijl nu de verticale doorgangen H″H″ en I″I″ elkander snijden, en de horizontale doorgangen H′H′ en I′I′ evenwijdig loopen, zoo blijkt hieruit, dat men ook in dit geval den regel van § 74 kan toepassen; hierdoor zal men L′L′ tot horizontale en L tot verticale projectie van de gemeene doorsnede der beide gegevene

vlakken vinden. Wordt deze lijn, die nu loodregt staat op het nieuwe verticale vlak RSP, en waarvan al de punten op eenen afstand LL′ boven het horizontale vlak liggen, op het oorspronkelijke verticale vlak geprojecteerd, dan is het klaar, dat men weder L″L″ voor derzelver verticale projectie zal bekomen.

§ 80. Moet men de doorsnede van drie vlakken bepalen, dat is het punt, dat aan drie vlakken gemeen is, dan bepale men eerst, volgens eene der boven beschrevene leerwijzen, de gemeene doorsnede van twee der gegevene vlakken, en vervolgens de gemeene doorsnede van een dezer twee vlakken met het derde, dan zal het punt, waar deze twee doorsneden elkander snijden, aan de drie vlakken gemeen zijn, en dus het gezochte snijpunt wezen.

Zijn, b. v., A′*A*A″, B′*B*B″ en C′*C*C″ (fig. 43) de drie gegevene vlakken, en wil men het punt bepalen, waar deze drie vlakken elkander snijden, dan construeert men eerst de doorsnede (B′*E*, *D*E″) van de vlakken A′*A*A″ en B′*B*B″, en vervolgens de doorsnede (G′*F*, *G*F″) van de vlakken A′*A*A″ en C′*C*C″; het punt (H′, H″), waar deze twee doorsneden elkander snijden, is dan het snijpunt der drie gegevene vlakken.

Van de doorsnede der twee laatste vlakken, behoeft men slechts eene der beide projectiën te bepalen. Heeft men, b. v., derzelver horizontale projectie bepaald, en snijdt deze die der twee eerste in H′, dan is H′ reeds de horizontale projectie van het begeerde snijpunt, en deszelfs verticale projectie, als in *D*E″ moetende liggen, kan dan door § 23 worden gevonden. Immers de doorsnede der twee laatste vlakken kan die der beide eerste niet kruisen, maar moet haar snijden, of met haar evenwijdig zijn. In het laatste geval zullen de drie vlakken elkander wel twee aan twee, maar niet onderling snijden.

Komt de gemeene doorsnede der twee laatste vlakken op die der twee eerste vlakken te vallen, dan snijden de drie vlakken elkander volgens eene lijn.

§ 81. Moet men eene lijn bepalen, die in een gegeven vlak gelegen is, dan neme men een willekeurig vlak aan, en construere de doorsnede van dit vlak met het gegeven vlak. Gemakshalve kan men dit willekeurig vlak loodregt op een der projectievlakken aannemen.

Is, b. v., B′*B*B″ (fig. 44) het gegeven vlak, en wil men eene lijn construeren, die in dit vlak ligt, dan construere men de doorsnede van dit vlak met het vlak D′*D*D″, dat loodregt staat op het horizontale vlak, dan zal deze doorsnede (C′*D*, *C*D″) klaarblijkelijk eene lijn wezen, die in het vlak B′*B*B″ gelegen is.

§ 82. Werkstuk. *Het punt te bepalen, waarin eene gegevene lijn een gegeven vlak snijdt.*

Construeert men een der projecterende vlakken van de gegevene lijn, en zoekt men de doorsnede van dit projecterend vlak met het gegevene vlak, dan zal deze doorsnede in een zelfde vlak gelegen wezen met de gegevene lijn, en wel in het geconstrueerde projecterend vlak der lijn. Het punt, waar deze doorsnede en de gegevene lijn elkander snijden, zal het gevraagde snijpunt moeten aanwijzen; want dit punt ligt in de gegevene lijn, en omdat de gezochte doorsnede tevens in het gegevene vlak ligt, ook in het gegeven vlak.

Is, b. v., (C'D', C''D'') (fig. 45) de gegevene lijn en B'*B*B'' het gegevene vlak, en wil men bepalen, waar deze lijn dit vlak snijdt, dan construeert men een van derzelver projecterende vlakken, b. v. het projecterend vlak C'*E*E'' van de gegevene lijn op het horizontale vlak (§ 54), en zoekt vervolgens (§ 73) de doorsnede (C'*E*, *C*E'') van dit projecterend vlak met het gegevene vlak; het punt (D', D''), waar deze lijn (C'*E*, *C*E'') de gegevene lijn (C'D', C''D'') snijdt (§ 39), zal dan het gezochte snijpunt wezen.

Om dus het snijpunt van eene lijn met een vlak te bepalen, zoekt men de doorsnede van een der projecterende vlakken dezer lijn met het gegeven vlak; het punt, waar deze doorsnede de gegevene lijn snijdt, is het begeerde.

§ 83. Kwam in de constructie van fig. 45 de projectie *C*E'' op de projectie C''D'' te vallen, dan zou zulks aantoonen, dat de gegevene lijn (C'D', C''D'') in het vlak B'*B*B'' gelegen was. Hieruit blijkt, hoe men in een gegeven vlak eene lijn kan construeren, waarvan de horizontale projectie gegeven is.

Is, b. v., B'*B*B'' (fig. 44) het gegeven vlak, en C'D' de gegevene horizontale projectie eener lijn, dan construeert men (§ 54) het projecterend vlak D'*D*D'' van de begeerde lijn op het horizontale vlak, en zoeke (§ 73) de doorsnede (C'*D*, *C*D'') van dit vlak met het gegevene, dan zal *C*D'' de gevraagde verticale projectie wezen (*).

§ 84. Liep in de constructie van fig. 45 de projectie *C*E'' evenwijdig met de projectie C''D'', dan zou zulks aantoonen, dat de gegevene lijn (C'D', C''D'') evenwijdig was aan het vlak B'*B*B''. Hieruit blijkt dus, hoe men eene lijn kan construeren, die evenwijdig is aan een gegeven vlak. Daartoe construere men namelijk eerst eene lijn, die in het gegeven vlak gelegen is, en trekke vervolgens eene lijn evenwijdig aan dezelve, dan zal deze de gevraagde zijn.

Is, b. v., B'*B*B'' (fig. 46) het gegeven vlak, en wil men eene lijn construeren, die evenwijdig is met dit vlak, dan construere men volgens § 81 eene lijn (C'*D*, *C*D''), gelegen in dit vlak, en trekke (§ 37) de lijn (E'F', E''F'') evenwijdig aan (C'*D*, *C*D''), dan zal de lijn (E'F', E''F'') evenwijdig zijn aan het vlak B'*B*B'', omdat zij evenwijdig loopt aan eene lijn (C'*D*, *C*D''), die in dit vlak ligt.

Het is klaar, dat ook de lijn (C'*D*, E''F''), zoowel als de lijn (E'F', *C*D'') aan het begeerde voldoen zal (§ 37).

§ 85. In § 80 is geleerd, hoe men het punt kan vinden, waarin drie gegevene vlakken elkander snijden; nu kan men echter dit snijpunt ook op eene andere wijze bepalen. Heeft men namelijk de doorsnede van twee der gegevene vlakken bepaald, en zoekt men het snijpunt van deze doorsnede met het derde vlak, dan zal dit ook het punt zijn, waarin de drie gegevene vlakken elkander snijden.

(*) Daar het onverschillig is, welke der twee projectievlakken men als het horizontale of verticale vlak wil beschouwen, zal men overal de woorden verticaal en horizontaal kunnen verwisselen, zoodat elk vraagstuk, dat ten opzigte van een dezer vlakken ontbonden is, ook ten opzigte van het andere voor opgelost moet worden gehouden. De in deze § opgegevene constructie zou dus ook woordelijk doorgaan, wanneer de verticale projectie der gevraagde lijn, in plaats van de horizontale, gegeven was, en hieruit de horizontale moest worden gevonden, doch dan zou men elke constructie, die nu in het horizontale vlak verrigt is, in het verticale vlak moeten uitvoeren, en omgekeerd. Wanneer alzoo in het vervolg de constructiën voor een dezer gevallen zijn aangewezen, zal de andere met stilswijgen voorbijgegaan, of alleen aangestipt worden.

§ 86. Werkstuk. *De doorgangen van een vlak gegeven zijnde, vraagt men dit vlak te construeren, dat wil zeggen, de horizontale projectie van eenig punt in dit vlak gegeven zijnde, deszelfs verticale projectie te bepalen, en omgekeerd.*

Trekt men door de gegevene horizontale projectie eene willekeurige lijn in het horizontale vlak, dan kan men deze lijn beschouwen als de horizontale projectie van eenige lijn in het vlak, gaande door het punt, waarvan de horizontale projectie gegeven is. Construeert men nu volgens § 83 de verticale projectie van deze lijn, dan zal in dezelve de gevraagde verticale projectie van het punt moeten gelegen zijn, en deze zal dus door § 23 bekend worden.

Is, b. v., B′*B*B″ (fig. 47) het gegeven vlak, en P′ de gegevene horizontale projectie van eenig punt in hetzelve, waarvan men de verticale projectie, en dus ook den afstand tot het horizontale vlak, wil bepalen, dan trekt men door P′ eene willekeurige lijn P′C′ in het horizontale vlak, welke nu de horizontale projectie is van eenige lijn, gelegen in het gegevene vlak; volgens § 83 vindt men, dat *C*D″ de verticale projectie van deze lijn is, en daar nu het punt in deze lijn moet liggen, zoo is (§ 23) P″ de gevraagde verticale projectie, en P″*P* de afstand van het punt tot het horizontale vlak.

§ 87. Trekt men door P′ de lijn P′*N* (fig. 48), evenwijdig aan den horizontalen doorgang van het gegeven vlak, dan bepaalt men de lijn, die in het vlak ligt en door het punt gaat, zoodanig, dat zij evenwijdig loopt aan het horizontale vlak, en dat dus al derzelver punten even ver van het horizontale vlak staan. N″P″ is de verticale projectie dezer lijn, P″ de gevraagde verticale projectie van het punt, en P″*P* = N″*N* de afstand van hetzelve tot het horizontale vlak. Deze laatste handelwijze wordt meestal aangewend ter bepaling van een punt uit eenig vlak.

§ 88. Trekt men door P′ de lijn P′M′ (fig. 49), evenwijdig aan de as van projectie, dan bepaalt men de lijn, die in het vlak ligt en door het punt gaat, zoodanig, dat zij evenwijdig loopt aan het verticale vlak. *M*P″ is de verticale projectie dezer lijn, en P″ de gevraagde verticale projectie van het punt.

§ 89. Is de verticale projectie van eenig punt in een vlak gegeven, dan kan men ook deszelfs horizontale projectie bepalen. De beschouwing van fig. 47, 48 en 49 zal genoegzaam wezen, om in te zien, hoe men handelen moet, wanneer men de horizontale projectie P′ wil bepalen, als de verticale projectie P″ gegeven is. Men zie overigens de noot op bl. 31.

Uit de oplossing van dit werkstuk blijkt tevens, hoe men onderzoeken kan, of een punt, dat door zijne beide projectiën gegeven is, al of niet in een gegeven vlak ligt.

§ 90. Werkstuk. *Den hoek te construeren, welken een gegeven vlak met elk der projectievlakken maakt.*

Zij B′*B*B″ (fig. 50) het gegeven vlak, en PC′P′ een vlak, dat loodregt op den horizontalen doorgang staat, dan is PC′P′ de hoek, dien het gegeven vlak met het horizontale vlak maakt. Laat men nu uit eenig punt P van de lijn PC′, volgens welke het gegeven vlak door het

standvlak PC'P' gemeden wordt, eene loodlijn PP' op het horizontale vlak vallen, dan is P' de horizontale projectie van het punt P uit dit vlak, P'C' de afstand van deze horizontale projectie tot den horizontalen doorgang, en PP' de afstand van het punt P tot het horizontale vlak. Wordt nu het standvlak PC'P' om deszelfs horizontalen doorgang P'C' nedergeslagen op het horizontale vlak, dan zal daardoor de regthoekige driehoek PC'P', en dus ook de standhoek PC'P' niet veranderen.

De hoek, dien een vlak dus maakt met het horizontale vlak, is een hoek eens regthoekigen driehoeks, waarin de regthoekszijde, staande over dezen hoek, de afstand is van eenig punt uit dit vlak tot het horizontale vlak, en waarin de andere regthoekszijde de afstand is van de horizontale projectie van dit punt tot den horizontalen doorgang des vlaks.

Is, b. v., B'*B*B'' (fig. 51) het gegeven vlak, en wil men den hoek construeren, dien dit vlak maakt met het horizontale vlak, dan neemt men de horizontale projectie P' van een willekeurig punt aan, en bepaalt, volgens § 87, deszelfs verticale projectie P'', en daardoor deszelfs afstand *P*P'' tot het horizontale vlak; vervolgens trekt men uit P' eene loodlijn P'C' op den horizontalen doorgang, en uit hetzelfde punt op P'C' eene loodlijn P'P = *P*P'', dan zal, als men de lijn PC' trekt, hoek PC'P' de begeerde wezen.

§ 91. Door in fig. 50 het horizontale vlak als het verticale vlak te beschouwen, en op eene overeenkomstige wijze te redeneren als in de vorige §, zal men bevinden, dat de hoek, dien een vlak met het verticale vlak maakt, een hoek zal wezen van eenen regthoekigen driehoek, waarin de regthoekszijde, staande over dezen hoek, de afstand is, welken een willekeurig punt uit dit vlak tot het verticale vlak heeft, en waarin de andere regthoekszijde de afstand is, dien de verticale projectie van dat punt tot den verticalen doorgang heeft.

Is, b. v., B'*B*B'' (fig. 51) het gegeven vlak, en wil men den hoek construeren, dien dit vlak maakt met het verticale vlak, dan neemt men de horizontale projectie P' van een willekeurig punt aan, en bepaalt, volgens § 87, deszelfs verticale projectie P'', trekt uit P'' eene loodlijn P''D'' op den verticalen doorgang, en uit hetzelfde punt op P''D'' eene loodlijn P''P = *P*P', dan zal, als men de lijn PD'' trekt, hoek P''D''P de begeerde wezen.

§ 92. Werkstuk. *Een vlak gegeven zijnde, vraagt men hetzelve om een' zijner doorgangen neder te slaan op het overeenkomstige projectievlak, dat is, te bepalen, waar elk gegeven punt van dit vlak, zich na dit nederslaan zal bevinden.*

Verbeeldt men zich, dat door eenig punt P van het vlak B'*B*B'' (fig. 50) een vlak gebragt wordt, loodregt op den horizontalen doorgang, dan zal PC'P' de hoek wezen, dien het vlak B'*B*B'' maakt met het horizontale vlak, en PC' de afstand, dien het punt P heeft tot den horizontalen doorgang, terwijl in de doorsnede P'C' de horizontale projectie P' van het punt P zal gelegen wezen. Wordt nu het vlak B'*B*B'' om deszelfs horizontalen doorgang nedergeslagen op het horizontale vlak, dan zal de lijn PC', die loodregt staat op *B*B', gedurende die beweging, altijd loodregt op *B*B' blijven, en dus komen

te vallen op P'C', die insgelijks loodregt is op BB', wanneer het hellende vlak op het horizontale vlak is nedergekomen. Het punt P zal voorts gedurende die beweging een' cirkelboog doorloopen, waarvan C' het middelpunt en PC' de straal is, en dus na die omwenteling in p' nederkomen, zoodanig, dat C'p' = PC' is.

Om alzoo te bepalen, waar een punt, welks horizontale projectie gegeven is, en dat in eenig vlak ligt, zal nederkomen, wanneer dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang wordt nedergeslagen op het horizontale vlak, zoekt men de verticale projectie van dat punt, en dus deszelfs afstand tot het horizontale vlak; vervolgens bepaalt men, door middel van dit punt, den hoek, dien het vlak maakt met het horizontale vlak, dan zal de afstand bekend worden, dien dit punt heeft van den horizontalen doorgang. Eindelijk zet men op de loodlijn, die uit de horizontale projectie van het punt op den horizontalen doorgang getrokken wordt, van derzelver voetpunt af, dezen afstand uit, dan zal het uiteinde dezer lijn de begeerde plaats aanwijzen.

Is, b. v., P' (fig. 52) de gegevene horizontale projectie van eenig punt uit het vlak $B'BB''$, en wil men bepalen, waar dit punt zal nederkomen, wanneer het vlak, om deszelfs horizontalen doorgang, wordt nedergeslagen op het horizontale vlak, dan bepaalt men volgens § 87 de verticale projectie P'', en daarna volgens § 90 den standhoek PC'P''; hierdoor wordt de afstand PC' bekend, dien het punt (P',P'') van den horizontalen doorgang heeft. Beschrijft men nu uit C', met PC' als straal, een' cirkelboog, die P'C' in p' snijdt, dan zal het punt p' de begeerde plaats aanwijzen.

§ 93. Door op eene overeenkomstige wijze, als in de vorige § verklaard is, te handelen, kan men ook een vlak om deszelfs verticalen doorgang nederslaan, en dan bepalen, waar elk punt uit hetzelve zal nederkomen. Zoo zal, b. v., het punt (P',P''), gelegen in het vlak $B'BB''$ (fig. 52), in p'' komen te vallen, wanneer dit vlak om deszelfs verticalen doorgang op het verticale vlak wordt nedergeslagen.

§ 94. Uit dit werkstuk leert men, de wezenlijke gedaante en ligging van eene figuur te bepalen, die in een gegeven plat vlak ligt, indien eene der beide projectiën van deze figuur gegeven is. Men zal namelijk de opgegevene constructie (§ 92 of § 93), voor elk hoekpunt van de figuur, moeten herhalen, en dan de geconstrueerde punten, op eene overeenkomstige wijze als in de gegevene projectie, moeten vereenigen. Is de figuur kromlijnig, dan zal men deze constructie voor een genoegzaam aantal punten moeten herhalen, om er de gevraagde figuur uit de hand door te kunnen trekken.

§ 95. Is een vlak $B'BB''$ (fig. 52) gegeven, en weet men, dat eenig punt uit hetzelve in p' is nedergekomen, door dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang neder te slaan op het horizontale vlak, dan kan men omgekeerd moeten bepalen, waar de projectiën van dit punt zullen komen te liggen, wanneer het vlak weder opgeslagen, en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt wordt. De beschouwing van fig. 52 is genoegzaam, om in te zien, hoe men hiertoe te handelen hebbe. Men bepaalt namelijk (§ 90) den hoek, dien het gegeven vlak maakt met het horizontale vlak, trekt uit p' eene loodlijn p'C' op den

horizontalen doorgang, en uit C′ eene onbepaalde lijn C′P, die met p′C′ den gevondenen standhoek maakt; vervolgens beschrijft men uit C′, met C′p′ als straal, eenen cirkelboog, die de onbepaalde lijn C′P in P mijdt; eindelijk laat men uit P eene loodlijn PP′ op C′p′ vallen, dan zal de voet P′ dezer loodlijn de begeerde horizontale projectie van het punt wezen. Deszelfs verticale projectie P″ kan nu volgens § 87 bepaald worden; of wel, door uit P′ eene loodlijn P′P op de as van projectie te trekken, en PP″ = PP′ te maken.

Was er gegeven, dat eenig punt uit het vlak B′BB″ in p″ is nedergekomen, door dit vlak om deszelfs verticalen doorgang op het verticale vlak neder te slaan, dan zou men op eene dergelijke wijze kunnen bepalen, waar de beide projectiën van dit punt komen te liggen, wanneer het vlak weder opgeslagen, en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt wordt.

§ 96. Werkstuk. *Door een gegeven punt een vlak te brengen, evenwijdig aan een gegeven vlak.*

De doorgangen van het gevraagde vlak moeten (§ 49) evenwijdig zijn aan die van het gegevene: men zal dus slechts één punt van een' dezer doorgangen behoeven te bepalen; want het snijpunt van een' der doorgangen met de as, zal een punt van den anderen doorgang aanwijzen.

Construeert men nu in het gegeven vlak eene willekeurige lijn, en trekt men door het gegeven punt eene lijn evenwijdig aan dezelve, dan zal deze laatste lijn in het gevraagde vlak moeten liggen, en het punt, waar zij een der projectievlakken snijdt, zal derhalve een punt van een' der doorgangen wezen, die dan beide geconstrueerd kunnen worden.

In plaats van eene lijn in het gegeven vlak te construeren, kan men zich bedienen van den horizontalen doorgang, die ook in het gegeven vlak ligt; trekt men dus door het gegeven punt eene lijn, evenwijdig aan den horizontalen doorgang, dan zal het punt, waar deze lijn het verticale vlak snijdt, een punt zijn van den verticalen doorgang des gevraagden vlaks.

Men kan ook gebruik maken van den verticalen doorgang, en door het gegeven punt eene lijn evenwijdig aan dezelve trekken; het punt, waar deze lijn het horizontale vlak ontmoet, zal dan een punt wezen van den horizontalen doorgang des gevraagden vlaks.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 53) het gegeven punt, en B′BB″ het gegeven vlak, dan is de horizontale doorgang B′B eene lijn in hetzelve, hebbende B′B tot horizontale, en de as van projectie tot verticale projectie (§ 32); de lijn (P′D, P″D′), die door het gegeven punt gaat, en evenwijdig is aan den horizontalen doorgang (§ 37), is alzoo eene lijn uit het gevraagde vlak; en het punt D″, waar deze lijn het verticale vlak ontmoet (§ 56), een punt van deszelfs verticalen doorgang. Trekt men nu door D″ eene lijn, evenwijdig aan BB″, dan is E″E de verticale doorgang, en daar E een punt van den horizontalen doorgang is, zoo zal EE′, evenwijdig aan BB′, de horizontale doorgang des gevraagden vlaks wezen.

§ 97. Werkstuk. *Den afstand van een gegeven punt tot een gegeven vlak te construeren.*

Laat men uit het gegeven punt eene loodlijn neder op het gegeven vlak, en construeert men het punt, waar deze lijn het vlak snijdt, dan zal de afstand van het gegeven punt tot aan dit snijpunt de begeerde wezen.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 54) het gegeven punt, en B′*B*B″ het gegeven vlak, dan is (§ 46), als men P′E′ loodregt op *B*B′, en P″E″ loodregt op *B*B″ trekt, (P′E′, P″E″) de loodlijn, die uit het gegeven punt op het gegeven vlak valt; construeert men nu (§ 82) het snijpunt (V′, V″) van deze lijn met het vlak, en vervolgens (§ 57) den afstand PV van de punten (P′, P″) en (V′, V″), dan zal PV de afstand wezen, dien het gegeven punt van het gegeven vlak heeft.

Vielen de punten (P′, P″) en (V′, V″) in elkander, dan zou daaruit blijken, dat het gegeven punt in het gegeven vlak gelegen was.

§ 98. Men kan dit werkstuk ook nog op eene andere wijze oplossen. Is namelijk (P′, P″) (fig. 55) het gegeven punt, en B′*B*B″ het gegeven vlak, dan construeert men (§ 87) de verticale projectie p″ van het punt in het vlak, dat P′ tot horizontale projectie heeft, en brengt door het punt (P′, p″) het standvlak, dan zal (§ 90) P′C′p de hoek wezen, dien het gegeven vlak maakt met het horizontale vlak, en C′p de doorsnede van het standvlak met het gegeven vlak, wanneer namelijk dit standvlak om deszelfs doorgang P′C′ nedergeslagen is op het horizontale vlak. Daar nu het gegeven punt (P′, P″) en het punt (P′, p″), omdat zij dezelfde horizontale projectie hebben, in eene lijn gelegen zijn, die loodregt staat op het horizontale vlak, zal het standvlak ook door het gegeven punt gaan, en bij het nederslaan van dit standvlak zal dus ook het gegeven punt in het horizontale vlak komen te liggen. Om te vinden waar dit zal gebeuren, merke men op, dat *P*P″ de afstand is, dien het gegeven punt heeft tot het horizontale vlak, en dat de projecterende lijn van dit punt, in P′ loodregt staande op P′C′, gedurende dit nederslaan altijd loodregt op P′C′ zal blijven. Rigt men dus uit P′ op P′C′ eene loodlijn P′P = *P*P″ op, dan zal P de plaats wezen, waar het gegeven punt nederkomt, wanneer het standvlak om de lijn P′C′ nedergeslagen wordt op het horizontale vlak. Daar nu het standvlak loodregt staat op het gegeven vlak, en door het gegeven punt gebragt is, moet de loodlijn, die uit dit punt op het gegeven vlak valt, in dit standvlak gelegen wezen. Laat men dus uit P eene loodlijn neder op C′p, dan zal deze loodlijn PV de werkelijke afstand wezen, dien het gegeven punt van het gegeven vlak heeft.

§ 99. Het voetpunt V (fig. 55) der loodlijn, die uit het gegeven punt (P′, P″) op het gegeven vlak B′*B*B″ valt, ligt hier met het standvlak nedergeslagen op het horizontale vlak. Wil men weder de beide projectiën van het punt V bepalen, en dus deszelfs waren stand ten opzigte der beide projectievlakken aanwijzen, dan merke men op, dat het standvlak P′C′p het projecterend vlak van de loodlijn PV is; laat men dus uit V eene loodlijn neder op P′C′, dan zal het voetpunt V′ dezer loodlijn de horizontale projectie van het punt V zijn, en daar VV′ deszelfs afstand is tot het horizontale vlak, zal deszelfs verticale projectie V″ gevonden worden, door uit V′ eene loodlijn op de as te trekken, en V′V″ = VV′ te maken.

§ 100. Men kan ook het standvlak P′C′p, dat loodregt staat op het horizontale vlak, als een nieuw verticaal vlak van projectie aannemen, dat om de nieuwe as van projectie P′C′ op het horizontale vlak is nedergeslagen. C′p is dan de nieuwe verticale doorgang van het gegeven vlak, en P de nieuwe verticale projectie van het gegeven punt. Verder is dan P′C′ de horizontale, en PV de verticale projectie van de loodlijn, die uit het gegeven punt (P′, P) op het gegeven vlak *B*C′p valt (§ 46); het voetpunt dezer loodlijn is (V′, V), en dus PV de afstand, dien het gegeven punt van het gegeven vlak heeft.

Hieruit blijkt tevens, hoe men, het horizontale vlak onveranderd latende, van het eene verticale vlak tot het andere kan overgaan.

§ 101. Werkstuk. *De projectiën van een punt gegeven zijnde, vraagt men dit punt op andere vlakken te projecteren.*

De projectie van een punt op een vlak is (§ 8) de voet van de loodlijn, die uit het punt op dat vlak valt. Laat men dus uit het gegeven punt eene loodlijn neder op het nieuwe projectievlak, en bepaalt men het snijpunt van deze loodlijn met het vlak, dan zal dit punt de gevraagde projectie wezen op dat vlak. Construeert men vervolgens den afstand, dien het gegeven punt van het nieuwe projectievlak heeft, dan kan men het punt ook projecteren op een tweede projectievlak, dat het eerste loodregt doorsnijdt.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 56) het gegeven punt en B′*B*B″ het vlak waarop men dit punt wil projecteren, dan vindt men, door de in § 98 opgegevene constructie, terstond den voet V der loodlijn, die uit het punt P op dit vlak valt, en tevens den afstand PV, dien het punt van dit vlak heeft. Volgens het bovengezegde is dus V de projectie van het punt P op het vlak B′*B*B″, en volgens § 99 zou men nu de beide projectiën van V op de eerste projectievlakken kunnen bepalen. Daar echter het opgegeven werkstuk meer bepaaldelijk vordert, deze projectie V in het nieuwe projectievlak werkelijk te teekenen, ten einde, wanneer er meer dan een punt gegeven is, de projectie van de geheele figuur op dit nieuwe vlak, in derzelver natuurlijke grootte en betrekkelijke ligging, te kunnen overzien, zoo bepaalt men, waar het punt V zal komen te vallen, wanneer het vlak B′*B*B″ om deszelfs horizontalen doorgang B′*B* omwentelt, tot dat hetzelve op het horizontale vlak komt te liggen. Daar nu VC′ de afstand is, dien het punt V heeft van den horizontalen doorgang B′*B*, zoo zal men daartoe slechts (§ 92) uit C′, met C′V als straal, eenen cirkelboog moeten beschrijven, als wanneer het punt p′, waar deze cirkelboog het verlengde van C′P′ snijdt, de begeerde plaats zal aanwijzen, en dus p′ de nieuwe horizontale projectie zal wezen van het gegeven punt.

Wil men verder het gegeven punt (P′, P″) nog projecteren op een tweede vlak, dat het vlak B′*B*B″ loodregt doorsnijdt, dan trekke men in dit vlak, dat nu op het horizontale vlak ligt nedergeslagen, eene willekeurige lijn as, die men als eene nieuwe as van projectie aanneemt, als wanneer het vlak asv het nieuwe verticale vlak van projectie zal wezen, en merke tevens op, dat, blijkens de constructie, PV de afstand is, waarop het gegeven punt boven het nieuwe horizontale vlak B′*B*B″ gelegen is; trekt men dus uit p′ eene loodlijn op as, en neemt

men op deze loodlijn de lijn $pp'' = PV$, dan zal p'' de nieuwe verticale projectie van het gegeven punt wezen.

Nam men $p'C'$ als de nieuwe as van projectie, en dus het standvlak $p'C'q$ als het nieuwe verticale vlak van projectie aan, dan zou men alleen uit p' eene loodlijn op $p'C'$ behoeven op te rigten, en deze loodlijn gelijk moeten maken aan PV, als wanneer het uiteinde dezer loodlijn de nieuwe verticale projectie van het gegeven punt zou wezen.

§ 102. Was in de constructie van fig. 56, het punt P aan de andere zijde van $C'p$ gevallen, dan zou daaruit gebleken zijn, dat het gegeven punt beneden het vlak $B'BB''$ gelegen was, en men zou alsdan, om de nieuwe verticale projectie van het punt te bekomen, den afstand VP op de loodlijn $p'p$, aan den anderen kant van a s hebben moeten uitzetten.

§ 103. Indien er, in plaats van een punt, eene lijn gegeven was, zou men twee punten in deze lijn moeten aannemen, en voor beide deze punten de opgegevene constructie moeten uitvoeren. Door de gelijknamige nieuwe projectiën van deze punten te vereenigen, zou men alsdan de nieuwe projectiën der gegevene lijn bekomen.

§ 104. Was eene willekeurige figuur door derzelver projectiën gegeven, dan zou men voor elk van derzelver hoekpunten de opgegevene constructie moeten herhalen, en de overeenkomstige punten door lijnen moeten vereenigen. En was de gegevene figuur kromlijnig, dan zou men de constructie voor een genoegzaam aantal punten moeten verrigten, om er de nieuwe projectiën uit de hand door te kunnen trekken.

Eindelijk zij nog opgemerkt, dat de verandering der vlakken van projectie dient, om werkstukken, waarvan de constructie in het algemeen lastig mogt zijn, tot meer bijzondere gevallen terug te brengen, waarin de constructie eenvoudiger is.

§ 105. Wil men van de nieuwe projectiën p' en p'' (fig. 56) tot de eerste projectiën P' en P'' terugkeeren, dan trekt men uit p' eene loodlijn $p'C'$ op $B'B$, neemt in $p'C'$ een willekeurig punt aan, dat men als de horizontale projectie van eenig punt uit het vlak $B'BB''$ beschouwt, en bepaalt daardoor (§ 90) den hoek $p'C'q$, dien dit vlak met het horizontale vlak maakt; vervolgens neemt men op $C'q$, de lijn $C'V = C'p'$, en rigt uit V op $C'q$ eene loodlijn $VP = pp''$ op, welke loodlijn men aan deze of gene zijde van $C'q$ uitzet, naargelang uit de ligging van p'' ten opzigte van a s blijkt, of het gegeven punt boven, dan wel beneden het vlak $B'BB''$ gelegen is; eindelijk laat men uit P eene loodlijn PP' neder op $C'p'$, dan zal P' de gevraagde horizontale projectie wezen, en daar PP' den afstand aanduidt, dien het punt van het oorspronkelijke horizontale vlak heeft, zal (§ 26) P'' de gevraagde verticale projectie wezen.

§ 106. Werkstuk. *Door een gegeven punt een vlak te brengen, loodregt op eene gegevene lijn.*

Construeert men een willekeurig vlak, dat loodregt staat op de gegevene lijn, dan moet het gevraagde vlak hiermede evenwijdig zijn; want alle vlakken, die loodregt staan op eene zelfde lijn, zijn evenwijdig. De vraag is dus hierdoor teruggebragt tot het construeren van een vlak, gaande door een gegeven punt, en evenwijdig zijnde aan een gegeven vlak, welk werkstuk reeds in § 96 is behandeld.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 57) het gegeven punt, en (C′D′, C″D″) de gegevene lijn, dan zal, als men uit een willekeurig punt *B* van de as van projectie, loodlijnen *B*B′ en *B*B″ op C′D′ en C″D″ trekt, het vlak B′*B*B″ (§ 46) loodregt staan op de gegevene lijn (C′D′, C″D″); brengt men nu (§ 96) door het punt (P′, P″) een vlak *G*′*GG*″, evenwijdig aan het vlak B′*B*B″, dan zal *G*′*GG*″ het gevraagde vlak wezen.

§ 107. Uit de beschouwing van fig. 57 blijkt, dat men tot de eigenlijke constructie van het gevraagde vlak, het hulpvlak B′*B*B″ niet behoeft te construeren. Trekt men namelijk uit P′ eene loodlijn op C′D′, voorts uit het punt *N*, waar deze loodlijn de as snijdt, eene loodlijn op de as, en door het punt P″ eene lijn evenwijdig aan dezelve, dan zal het punt N″, waar deze twee laatste lijnen elkander snijden, een punt wezen van den verticalen doorgang des gevraagden vlaks. Trekt men dus uit N″ eene loodlijn *GG*″ op C″D″, en uit *G* eene loodlijn *GG*′ op C′D′, dan zullen deze de doorgangen des gevraagden vlaks wezen.

§ 108. Dit werkstuk kan ook nog op eene andere wijze worden opgelost, door namelijk een der projecterende vlakken van de gegevene lijn als een nieuw projectievlak, en dus eene van derzelver projectiën als eene nieuwe as van projectie aan te nemen.

Is, b. v., weder (P′, P″) (fig. 58) het gegeven punt, en (C′D′, C″D″) de gegevene lijn, en neemt men het projecterend vlak dezer lijn als het nieuw verticaal vlak van projectie aan, dat om de horizontale projectie C′D′, als de nieuwe as van projectie, op het horizontale vlak is nedergeslagen, dan blijft C′D′, of de nieuwe as van projectie, de horizontale projectie der gegevene lijn, en deze laatste, als in het nieuwe verticale vlak gelegen, is zelve hare verticale projectie CD, om welke te bepalen, men deze lijn slechts volgens § 65 om derzelver horizontale projectie op het horizontale vlak behoeft neder te slaan. Trekt men vervolgens uit P′ eene loodlijn op C′D′, en maakt men *pp*″ = *P*P″, dan zal p″ de nieuwe verticale projectie van het gegeven punt wezen. Daar nu het gevraagde vlak loodregt moet staan op de gegevene lijn, en deze hier in het verticale vlak ligt, moet het gevraagde vlak ook loodregt wezen op het verticale vlak; de verticale projectiën van alle punten uit hetzelve, en dus ook p″ moeten derhalve (§ 41) in desselfs verticalen doorgang liggen. En daar deze verticale doorgang tevens (§ 46) loodregt moet wezen op de verticale projectie CD der gegevene lijn, is de lijn *gg*″, die uit p″ loodregt door CD getrokken wordt, de verticale doorgang, en de lijn *gg*′, die uit *g* loodregt op de horizontale projectie C′D′ getrokken wordt, de horizontale doorgang van het gevraagde vlak. De projectiën van het punt, waar de gegevene lijn het begeerde vlak doorsnijdt, zijn q″ en *q*.

Om den doorgang met het oorspronkelijke verticale vlak te bepalen, behoeft men slechts uit het punt, waar de gevondene horizontale doorgang de eerste as van projectie snijdt, eene loodlijn op C″D″ te trekken, dan zal deze de begeerde wezen.

§ 109. Het is klaar, dat de opgegevene constructiën geene verandering zullen ondergaan, wanneer het gegeven punt in de gegevene lijn gelegen is, en dat men dus ook het werkstuk heeft leeren oplossen:

door een gegeven punt in eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat loodregt staat op die lijn.

§ 110. Werkstuk. *Door een gegeven punt eene loodlijn op eene gegevene lijn te trekken.*

Brengt men door het gegeven punt een vlak, loodregt op de gegevene lijn, en zoekt men het snijpunt van deze lijn met dat vlak, dan zal de lijn, die dit snijpunt met het gegeven punt vereenigt, de begeerde wezen.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 59) het gegeven punt, en (C′D′, C″D″) de gegevene lijn, dan is (§ 107) E′ÆE″ een vlak, dat door het punt (P′, P″) gaat, en loodregt staat op de lijn (C′D′, C″D″); terwijl (F′, F″) het punt is (§ 82), waar de lijn (C′D′, C″D″) het vlak E′ÆE″ snijdt. Vereenigt men nu de punten (P′, P″) en (F′, F″), dan zal (P′F′, P″F″) de begeerde lijn wezen.

§ 111. Men kan de constructie van dit werkstuk ook volgens § 108 inrigten; alsdan zal (fig. 58) g′gg″ het vlak zijn, dat door het gegeven punt (P′, P″) gaat, en loodregt staat op de gegevene lijn (C′D′, C″D″), terwijl (q, q″) het punt is, waar de lijn (C′D′, C″D″) het vlak g′gg″ snijdt; vereenigt men dus de punten (P′, p″) en (q, q″), dan zal (P′q, p″q″) de begeerde lijn wezen.

§ 112. Moest men den afstand bepalen van een gegeven punt (P′, P″) tot eene gegevene lijn (C′D′, C″D″), dan zou men in fig. 59, volgens § 57 den afstand moeten construeren van de punten (P′, P″) en (F′, F″), en in fig. 58 den afstand van de punten (P′, p″) en (q, q″).

§ 113. Het vraagstuk, om uit een gegeven punt in eene gegevene lijn, eene loodlijn op deze lijn op te rigten, is geheel onbepaald; want brengt men door het gegeven punt een vlak loodregt op de gegevene lijn (§ 109), dan zal elke lijn, die men (§ 81) in dit vlak construeert, mits door het gegeven punt gaande, aan het begeerde voldoen.

§ 114. Werkstuk. *Een vlak te construeren, dat door drie gegevene punten gaat.*

Vereenigt men een der gegevene punten met de beide overige, dan verkrijgt men twee lijnen, die in het gevraagde vlak moeten liggen; zoekt men nu de punten, waar elk dezer lijnen het horizontale vlak snijdt, dan bepalen deze twee punten den horizontalen doorgang van het gevraagde vlak. Even zoo kan deszelfs verticale doorgang gevonden worden, door de punten te bepalen, waar elk dezer lijnen het verticale vlak snijdt.

Heeft men echter een' der doorgangen van het gevraagde vlak gevonden, dan zal men nog slechts één punt van den anderen behoeven te construeren; want het punt, waarin de gevondene doorgang de as van projectie snijdt, is ook een punt van den anderen doorgang, en is de gevondene doorgang evenwijdig aan de as van projectie, dan zal ook de andere doorgang zulks moeten wezen.

Zijn, b. v., (A′, A″), (B′, B″) en (C′, C″) (fig. 60) de drie gegevene punten, dan zullen de lijnen (A′B′, A″B″) en (B′C′, B″C″) in het gevraagde vlak moeten liggen. Volgens § 56 zijn nu D′ en E′ de punten, waarin deze lijnen het horizontale vlak ontmoeten; derhalve is de lijn *F*D′E′ de horizontale doorgang van het gevraagde vlak, en het punt *F*, waar deze doorgang de as snijdt, een punt van den ver-

ticalen doorgang. Daar verder (§ 56) G″ het punt is, waar de lijn (B′C′, B″C″) het verticale vlak snijdt, zoo is *k*G″ de verticale doorgang des gevraagden vlaks.

§ 115. Viel het punt, waar de geconstrueerde horizontale doorgang de as snijdt, buiten de teekening, dan zou men, om den verticalen doorgang te vinden, de punten moeten bepalen, waar twee der drie lijnen, die men weet, dat in het gevraagde vlak moeten liggen, het verticale vlak snijden; de lijn, gaande door deze twee punten, zou alsdan de rigting van den verticalen doorgang aanwijzen.

Mogt daarenboven slechts één dezer snijpunten binnen de teekening vallen, dan kan men op de volgende wijze handelen, om de rigting van den verticalen doorgang te bepalen.

Is, b. v., D′E′ (fig. 61) de horizontale doorgang van eenig vlak, gaande door drie gegevene punten, en valt het punt, waar deze doorgang de as snijdt, buiten de teekening; is voorts G″ het punt, waar eene der drie lijnen, die men weet, dat in het gevraagde vlak moeten liggen, het verticale vlak snijdt, en vallen de snijpunten der beide andere lijnen met het verticale vlak, ook buiten de teekening, dan trekke men uit G″ eene willekeurige lijn G″*H*, die D′E′ in I′ snijdt, en uit een willekeurig punt K′ van D′E′, eene lijn K′*L*, evenwijdig aan G″I′; construeert men nu het punt M″ zoodanig, dat I′*H* : *H*G″ = K′*L* : *L*M″ is, dan zal G″M″ de begeerde rigting van den verticalen doorgang wezen.

§ 116. Moet men een vlak brengen door twee lijnen, die elkander snijden, of die evenwijdig zijn, dan behoeft men alleen te zoeken, in welke punten deze lijnen de vlakken van projectie ontmoeten. Deze punten zullen dan de doorgangen van het gevraagde vlak bepalen.

§ 117. Het geval, dat men een vlak moet construeren, gaande door een gegeven punt en eene gegevene lijn, wordt tot dat van de vorige § teruggebragt, door het gegeven punt met een willekeurig punt der gegevene lijn te vereenigen; want dan verkrijgt men twee lijnen, die elkander snijden, waardoor het gevraagde vlak moet gebragt worden.

§ 118. Werkstuk. *Den hoek te construeren, welke twee gegevene vlakken met elkander maken.*

De hoek, welken twee vlakken met elkander maken, wordt gemeten door den hoek van twee lijnen, die uit eenig punt van de gemeene doorsnede loodregt op dezelve in deze twee vlakken getrokken worden, en welke dus een vlak bepalen, dat loodregt is op die gemeene doorsnede.

Construeert men alzoo de doorsnede der twee gegevene vlakken (§ 73), brengt men door een willekeurig punt dezer doorsnede een vlak loodregt op dezelve (§ 109), bepaalt men vervolgens de lijnen, volgens welke dit vlak elk der gegevene vlakken snijdt (§ 73), en eindelijk den hoek, dien deze twee lijnen met elkander maken (§ 72), dan zal deze hoek de begeerde wezen.

§ 119. Ofschoon in de vorige § in het algemeen de weg is aangewezen, dien men volgen kan, en hierdoor het werkstuk tot de oplossing van vorige werkstukken is teruggebragt, kan men echter veel lijnen in de constructie uitwinnen, door op de volgende wijze te werk te gaan.

Laat B″*C*D′ en B″*E*D′ (fig. 62) de twee gegevene vlakken zijn, dan

is (§ 73) BD' de horizontale projectie van derzelver gemeene doorsnede; trekt men nu uit een willekeurig punt F′ dezer projectie eene lijn H′F′I′ loodregt op dezelve, dan is deze lijn (§ 46) de horizontale doorgang van een vlak, dat loodregt staat op de gemeene doorsnede der gegevene vlakken. Dit vlak snijdt de doorgangen CD' en ED' in twee punten H′ en I′; het snijdt de vlakken zelven volgens twee lijnen, welke met H′I′ eenen driehoek vormen, waarin de hoek, tegen over de zijde H′I′, de begeerde is, en het snijdt het projecterend vlak $B''BD'$ der gemeene doorsnede volgens eene lijn, die door den top G des driehoeks en door het punt F′ gaat. Daar nu I′F′ loodregt is op het vlak $B''BD'$, moet I′F′ ook loodregt wezen op deze doorsnede GF′; deze doorsnede GF′ moet alzoo de hoogte van bovengenoemden driehoek zijn. Laat men nu het vlak dezes driehoeks om deszelfs basis H′I′ omwentelen, ten einde hetzelve op het horizontale vlak van projectie neder te slaan, dan zal de hoogte dezes driehoeks, of wel de doorsnede van het loodregte vlak met het vlak $B''BD'$, altijd loodregt op H′I′ blijven, en de top des driehoeks zal dus komen te liggen in eenig punt van de lijn BD', zoodra het vlak des driehoeks op het horizontale vlak is nedergekomen. Er blijft derhalve thans nog alleen over, deze hoogte des driehoeks te bepalen, dat is, de lengte der loodlijn, die uit het punt F′ op de doorsnede der twee vlakken valt. Deze loodlijn ligt in het projecterend vlak $B''BD'$ der gemeene doorsnede; laat men nu dit vlak om de verticale lijn $B''B$ omwentelen, ten einde hetzelve op het verticale vlak van projectie neder te slaan, dan zal, als men $Bd = BD'$ en $BF = BF'$ neemt, de lijn $B''d$ de lengte voorstellen van dat gedeelte der gemeene doorsnede, hetwelk tusschen de beide vlakken van projectie begrepen is, en laat men uit het punt F op deze lijn $B''d$, de loodlijn FG vallen, dan is FG de begeerde hoogte des driehoeks. Neemt men dus $F'G' = FG$, en voltooit men den driehoek H′G′I′, dan zal G′ de hoek zijn, welke door de beide gegevene vlakken gevormd wordt.

§ 120. Het kan gebeuren, dat in de opgegevene constructie (fig. 62) de lijn, die uit F′ loodregt op de horizontale projectie der gemeene doorsnede getrokken wordt, evenwijdig loopt aan een' der horizontale doorgangen, b. v. aan $D'E$; in dat geval zal men, ter bepaling van den begeerden hoek, na het punt G′ geconstrueerd te hebben, uit G′ eene lijn evenwijdig aan $D'E$ moeten trekken.

Verder zij nog opgemerkt, dat men de hoogte des driehoeks, waarin de standhoek begrepen is, ook kan vinden, door de gemeene doorsnede (BD', $B''D$) der twee vlakken om derzelver horizontale projectie BD' neder te slaan, en dan uit F′ eene loodlijn op de nedergeslagene gemeene doorsnede te trekken.

§ 121. Om den hoek te bepalen, dien twee vlakken, waarvan de horizontale of de verticale doorgangen evenwijdig zijn, met elkander maken, kan men op dezelfde wijze handelen, als in § 119 verklaard is; het is echter alsdan niet noodig, de hoogte te construeren van den driehoek, waarin de begeerde hoek gelegen is.

Zijn, b. v., $B''CL'$ en $B''EK'$ (fig. 63) de twee gegevene vlakken waarvan de horizontale doorgangen CL' en EK' evenwijdig zijn, dan is de gemeene doorsnede dezer vlakken (§ 48) evenwijdig aan het horizontale

vlak, en dus zal het vlak, dat loodregt op deze doorsnede gebragt wordt, ook loodregt zijn op het horizontale vlak. De hoogte van den driehoek, die den begeerden standhoek bevat, zal alzoo gelijk wezen aan den afstand, dien elk punt van de gemeene doorsnede der vlakken tot het horizontale vlak heeft, dat is, gelijk aan $B''B$. Trekt men dus uit een willekeurig punt F' van de horizontale projectie BD' der gemeene doorsnede eene loodlijn $H'F'I'$ op dezelve, en maakt men $F'G' = B''B$, dan zal, als men de lijnen $H'G'$ en $G'I'$ trekt, G' de begeerde hoek wezen.

§ 122. Loopen de doorgangen van twee vlakken evenwijdig aan de as van projectie, dan zal (§ 50), zoo de vlakken elkander snijden, ook de gemeene doorsnede dezer vlakken evenwijdig zijn aan de as van projectie. Om in zulk geval den hoek te bepalen, dien de twee vlakken met elkander maken, brengt men door een willekeurig punt van de as een vlak loodregt op dezelve, en slaat dit vlak om een' zijner doorgangen neder op het overeenkomstige vlak van projectie, ten einde de doorsneden te vinden van dit standvlak met de twee gegevene vlakken. De hoek, waaronder deze lijnen elkander snijden, zal alsdan de begeerde wezen.

Zoo is, b. v., $H'LI'$ (fig. 41 en 42) de hoek, volgens welken de vlakken $H'H'$, $H''H''$ en $I'I'$, $I''I''$ elkander snijden.

§ 123. Men kan ook den hoek van twee gegevene vlakken bepalen, door uit een willekeurig punt eene loodlijn op elk dezer vlakken neder te laten (§ 46), en den hoek te construeren, waaronder deze twee loodlijnen elkander snijden (§ 72); deze hoek, of wel deszelfs supplement, zal alsdan de begeerde wezen.

§ 124. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn in een gegeven vlak een ander vlak te brengen, dat met het gegeven vlak eenen gegevenen hoek maakt.*

Construeert men een vlak, dat loodregt staat op de gegevene lijn, en door een willekeurig punt van dezelve gaat, dan zal de doorsnede van dit vlak met het gegeven vlak een der beenen van den gegevenen standhoek zijn, terwijl het andere been gevonden wordt, door in het loodregte vlak, uit het in de gegevene lijn aangenomen punt, eene lijn te trekken, welke met genoemde doorsnede eenen hoek maakt, die gelijk is aan den gegevenen hoek. Brengt men nu een vlak door deze laatste lijn en de gegevene, dan zal dit het gevraagde vlak zijn.

Om in het loodregte vlak zulk eene lijn, als boven gezegd is, te construeren, moet men dit loodregte vlak, om een' van deszelfs doorgangen, op het overeenkomstige vlak van projectie, b.v. op het horizontale, nederslaan, en bepalen (§ 92), waar het in de gegevene lijn aangenomen punt, en nog een ander punt uit de gevondene doorsnede, alsdan komen te vallen; deze twee punten vereenigd zijnde, zal de gevondene doorsnede zich met het loodregte vlak op het horizontale vlak bevinden. Heeft men nu in het horizontale vlak, uit het in de gegevene lijn aangenomen punt, eene lijn getrokken, die met gezegde doorsnede den gegeven' hoek maakt, dan zal men (§ 95) moeten bepalen, waar de projectiën van een der punten dezer lijn komen te liggen, wanneer het loodregte vlak weder opgeslagen, en tot deszelfs aanvankelijken stand teruggebragt wordt. De projectiën van dit punt alsdan met die van het aangenomen punt vereenigende, zal men de lijn in de ruimte verkrijgen, die met de gegevene lijn het gevraagde vlak bepaalt.

§ 125. Men kan echter de oplossing van het voorgaande werkstuk gemakkelijk omkeeren, ten einde die op het tegenwoordige toe te passen. In fig. 62 namelijk is B″*E*D′ een vlak, gaande door de lijn (*B*D′, B″*D*), die in het vlak B″*C*D′ ligt, en makende met dit vlak den hoek H′G′I′. Is nu het vlak B″*C*D′, met eene lijn (*B*D′, B″*D*) in hetzelve, gegeven, en moet men een vlak bepalen, dat door deze lijn gaat en met het gegeven vlak eenen gegevenen hoek H′G′I′ maakt, dan merke men op, dat de punten D′ en B″, waar de gegevene lijn het horizontale en verticale vlak snijdt, noodzakelijk punten moeten wezen van den horizontalen en verticalen doorgang des gevraagden vlaks, en dat men dus nog slechts één punt van een' der doorgangen behoeft te construeren. Trekt men daartoe door eenig willekeurig punt F′ van de horizontale projectie der gegevene lijn, eene lijn F′H′ loodregt op dezelve, construeert men verder de lijn *F*G, en daardoor het punt G′, en beschrijft men uit G′ op H′G′ den gegevenen hoek H′G′I′, dan zal het snijpunt I′, van de lijn G′I′ met de lijn F′H′, het begeerde punt van den horizontalen doorgang des gevraagden vlaks wezen.

Vereenigt men dus de punten D′ en I′, dan zal D′*E* de horizontale, en gevolgelijk B″*E* de verticale doorgang zijn van het gevraagde vlak.

§ 126. Gebeurt het in deze constructie, dat de lijn G′I′ evenwijdig komt te loopen met H′F′, dan zal men uit het punt D′ eene lijn evenwijdig met H′F′ moeten trekken, en het punt, waar deze de as snijdt, met B″ moeten vereenigen.

Dewijl men den gegevenen hoek ook aan den anderen kant van H′G′ kan uitzetten, zoo zal men, als de gegevene hoek niet regt is, altijd twee vlakken vinden, die aan de vraag beantwoorden.

§ 127. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat met het horizontale vlak eenen gegevenen hoek maakt.*

Laat B′*B*B″ (fig. 64) het gevraagde vlak zijn, dan is het klaar, dat de horizontale doorgang van dit vlak door het punt E′ moet gaan, waar de gegevene lijn DE′ het horizontale vlak ontmoet. Onderstelt men nu, dat door eenig punt D van de gegevene lijn een vlak DF′D′ gebragt wordt, dat loodregt staat op den horizontalen doorgang *B*B′, dan zullen de lijnen DF′, F′D′ en DD′, volgens welke dit vlak het gevraagde vlak, het horizontale vlak en het projecterend vlak van de gegevene lijn snijdt, eenen regthoekigen driehoek DF′D′ vormen, waarin men de zijde DD′ en den hoek DF′D′ kent, en welke driehoek dus geconstrueerd kan worden; hierdoor zal de lijn D′F′ bekend worden. Omdat nu het vlak DF′D′ loodregt staat op *B*B′, zal driehoek D′F′E′ regthoekig zijn in F′; construeert men dezen driehoek, waarin men de hypothenusa D′E′ en de regthoekszijde D′F′ kent, dan zal daardoor het punt F′ bekend worden. De horizontale doorgang *B*B′ van het vlak, door de punten E′ en F′ bepaald zijnde, zal men den verticalen doorgang kunnen vinden, door te bepalen, waar de gegevene lijn het verticale vlak ontmoet, en dit ontmoetingspunt met *B* te vereenigen. Of wel, men trekke door een willekeurig punt D van de gegevene lijn, eene lijn evenwijdig aan den gevondenen horizontalen doorgang, dan zal deze lijn in het gevraagde vlak moeten liggen, en het punt, waar zij het verticale vlak ontmoet, met *B* vereenigd zijnde, zal insgelijks den verticalen doorgang aanwijzen.

Is alzoo (D'E', D''E) (fig. 65) de gegevene lijn, en B de hoek, dien het gevraagde vlak, gaande door deze lijn, met het horizontale vlak moet maken, dan is E', waar de lijn (§ 56) het horizontale vlak ontmoet, een punt van den horizontalen doorgang des begeerden vlaks. Om nu nog een punt van denzelven te vinden, neemt men in de gegevene lijn een willekeurig punt (D', D'') aan, en construeert den regthoekigen driehoek D'DF, waarin D'D = DD'' en hoek D'DF = 90° — B = A is; vervolgens beschrijft men op D'E' als middellijn eenen cirkel, en neemt daarin de koorde D'F' = D'F, dan zal F' ook een punt van den horizontalen doorgang wezen. Vereenigt men dus de punten E' en F', dan zal GG' de horizontale, en daar de gegevene lijn het verticale vlak in H'' snijdt, zal GG'' de verticale doorgang des gevraagden vlaks zijn.

§ 128. Wanneer het vlak B'EB'' (fig. 64) om de lijn DE' omwentelt, zal het klaarblijkelijk (tenzij de gegevene hoek regt ware) eens in zulk een' stand komen, dat het, altijd door de lijn DE' gaande, weder denzelfden hoek DF'D' maakt met het horizontale vlak. Er moeten dus twee vlakken bestaan, die aan de vraag voldoen, en waarvan de horizontale doorgangen beide door E' gaan. Dit tweede vlak zal geconstrueerd worden, door in den cirkel, op D'E' (fig. 65) beschreven, de koorde D'f' = D'F, aan de andere zijde van D'E', uit te zetten, en vervolgens E' met f', en g met H'' te vereenigen, waardoor men deszelfs horizontalen doorgang gg' en deszelfs verticalen doorgang gg'' zal bekomen.

§ 129. Uit de beschouwing van fig. 64, en de constructie van fig. 65 blijkt, dat, zal de oplossing mogelijk zijn, de gegevene standhoek altijd grooter moet wezen, dan de hoek, dien de gegevene lijn met het horizontale vlak maakt, en dat men slechts één vlak zal bekomen, wanneer die hoeken even groot zijn.

Staat dus de gegevene lijn loodregt op het horizontale vlak, en is de gegevene hoek niet regt, dan is het werkstuk onmogelijk; is echter de gegevene lijn loodregt op het horizontale vlak, en de gegevene hoek regt, dan is het werkstuk onbepaald; want elk vlak, door deze lijn gaande, zal alsdan aan hetzelve beantwoorden.

§ 130. De oplossing van het werkstuk, om door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat met een gegeven vlak eenen gegevenen hoek maakt, kan, door toepassing van hetgeen in § 101 geleerd is, tot de oplossing van het tegenwoordige worden teruggebragt. Neemt men namelijk het gegeven vlak als een nieuw projectievlak aan, waarop men de gegevene lijn projecteert, en slaat men het gegeven vlak, met die nieuwe projectie der gegevene lijn, om den horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak, dan zal men een vlak moeten construeren, gaande door eene gegevene lijn, en makende eenen gegevenen hoek met het horizontale vlak. Heeft men dus, volgens § 127, dit vlak geconstrueerd, dan zal men slechts moeten bepalen, wat deszelfs doorgangen zijn met de eerste projectievlakken.

De punten, waarin de gegevene lijn de beide vlakken van projectie ontmoet, zullen klaarblijkelijk punten zijn van de doorgangen des gevraagden vlaks, zoodat er nog slechts één punt van een' der doorgangen

van hetzelve behoeft bepaald te worden. Om verder de gegevene lijn op het gegeven vlak te projecteren, moet men (§ 103) de projectiën van twee punten dezer lijn op hetzelve bepalen, en deze projectiën met elkander vereenigen. Hiertoe kan men gemakshalve aannemen de punten, waar de gegevene lijn het verticale vlak en het gegeven vlak ontmoet. Heeft men nu de lijn in het gegeven vlak bepaald, waardoor het gevraagde vlak moet gebragt worden, dan zal het punt, waar deze lijn den horizontalen doorgang van het gegeven vlak snijdt, het gezochte punt zijn van den horizontalen doorgang des gevraagden vlaks.

Daar er twee lijnen in het gegeven vlak kunnen geconstrueerd worden, waardoor het gevraagde vlak moet gaan, zoo zullen ook hier in het algemeen twee vlakken bestaan, die aan de vraag voldoen. Verder gelden hier dezelfde aanmerkingen, als in § 129 gemaakt zijn. De gegeven standhoek namelijk, moet, zal de oplossing mogelijk zijn, altijd grooter wezen, dan de hoek, dien de gegevene lijn met het gegevene vlak maakt, en men zal slechts één vlak bekomen, wanneer die hoeken even groot zijn; is dus de gegevene lijn loodregt op het gegevene vlak, en is de gegevene hoek niet regt, dan is het werkstuk onmogelijk; is echter de gegevene lijn loodregt op het gegeven vlak, en de gegevene hoek regt, dan is het werkstuk onbepaald; want elk vlak, dat door deze lijn gebragt wordt, zal alsdan aan hetzelve beantwoorden.

§ 131. Werkstuk. *Den kortsten afstand te bepalen van twee lijnen, welke elkander kruisen.*

Laat AB en CD (fig. 66) de twee gegevene lijnen zijn; trekt men dan uit een willekeurig punt E van de lijn CD, eene lijn EF, evenwijdig aan AB, en brengt men door de lijnen CD en EF een vlak, dan zal AB evenwijdig zijn aan dit vlak; de loodlijn GH, die uit eenig punt G van de lijn AB op dit vlak wordt nedergelaten, zal derhalve de gevraagde kortste afstand der gegevene lijnen wezen. Wil men echter de punten in beide lijnen bepalen, waarin deze kortste afstand werkelijk plaats vindt, dan trekke men uit den voet H der loodlijn GH, eene lijn HI, evenwijdig met AB, en uit het punt K, waar deze lijn de lijn CD snijdt, eene lijn KL, evenwijdig met GH, snijdende de lijn AB in het punt L, dan is KL = GH, en loodregt op de gegevene lijnen AB en CD, dus zijn K en L de begeerde punten.

Al de hier opgegevene constructiën kunnen nu door middel van de voorgaande werkstukken worden uitgevoerd.

Zijn, b. v., (A′B′, A″B″) en (C′D′, C″D″) (fig. 67) de twee gegevene lijnen, dan is:

(E′F′, E″F″) eene lijn, die (§ 37) uit het punt (E′, E″) van de lijn (C′D′, C″D″) evenwijdig is getrokken aan de lijn (A′B′, A″B″);

P′PP″ het vlak, dat door de lijnen (C′D′, C″D″) en (E′F′, E″F″) gebragt is (§ 116), en waaraan dus de lijn (A′B′, A″B″) evenwijdig loopt;

(G′R′, G″S″) de lijn, die uit het punt (G′, G″) van de lijn (A′B′, A″B″) loodregt op het vlak P′PP″ getrokken is (§ 46);

(H′, H″) het punt, waar deze loodlijn het vlak P′PP″ ontmoet (§ 82);

(G′H′, G″H″) is dan eindelijk de gevraagde kortste afstand, en men kan deszelfs lengte construeren volgens § 57.

Verder is, om de punten in beide lijnen te bepalen, waarin deze kortste afstand werkelijk plaats vindt:

(H'K', H''K'') eene lijn, die (§ 37) uit het punt (H', H'') van de lijn (G'H', G''H'') evenwijdig is getrokken aan de lijn (A'B', A''B''), en die de lijn (C'D', C''D'') in het punt (K', K'') snijdt;

(K'L', K''L'') eene lijn, die (§ 37) uit het punt (K', K'') evenwijdig is getrokken aan de lijn (G'H', G''H''), en die de lijn (A'B', A''B'') in het punt (L', L'') snijdt.

(K', K'') en (L', L'') zijn alzoo de begeerde punten in de gegevene lijnen, en dus is ook (K'L', K''L'') de gevraagde kortste afstand, waarvan men de lengte volgens § 57 kan construeren.

§ 132. Wanneer eene der gegevene lijnen loodregt staat op een der projectievlakken, dan wordt de constructie zeer eenvoudig.

Zijn, b. v., (A', ΔA'') en (B'C', B''C'') (fig. 68) twee gegevene lijnen, waarvan de eerste loodregt staat op het horizontale vlak, dan moet de kortste afstand dezer lijnen evenwijdig zijn aan het horizontale vlak, en dus gelijk wezen aan zijne horizontale projectie (§ 32). Daar nu alle lijnen, die uit A' naar een der punten van B'C' getrokken worden, horizontale projectiën zijn van lijnen, die twee punten der gegevene lijnen vereenigen, zoo zal de kortste lijn, die uit A' naar B'C' kan getrokken worden, dat is, de loodlijn A'D', die uit A' op B'C' valt, de horizontale projectie, en tevens de lengte van den gevraagden kortsten afstand zijn. Het punt van de lijn (B'C', B''C''), waarin de kortste afstand plaats vindt, heeft D' tot horizontale, en dus D'' tot verticale projectie; daar verder de lijn, waarvan A'D' de horizontale projectie is, evenwijdig moet loopen aan het horizontale vlak, en D'' een punt van derzelver verticale projectie is, zal men deze verticale projectie vinden, door (§ 32) uit D'' eene lijn D''a'' evenwijdig aan de as van projectie te trekken. (A', a'') is dus het punt van de lijn (A', ΔA''), waarin de kortste afstand plaats vindt.

§ 133. Het algemeene geval, dat in § 131 behandeld is, kan altijd tot het bijzondere geval van de vorige § worden teruggebragt, door een vlak te construeren, dat loodregt staat op een der gegevene lijnen, en dit als een nieuw vlak van projectie aan te nemen. Heeft men op dit vlak, en op een ander, dat hetzelve loodregt doorsnijdt, de gegevene lijnen geprojecteerd (§ 103), dan kan men de constructie van § 132 uitvoeren, en vervolgens de gevondene punten tot de eerste vlakken van projectie terugbrengen. De constructie zal hierdoor echter in de meeste gevallen niet minder zamengesteld worden, dan die van § 131.

OVER DEN DRIEVLAKKIGEN HOEK, EN OPLOSSING VAN WERKSTUKKEN, DAARTOE BETREKKELIJK.

---

§ 134. In eenen drievlakkigen hoek komen voornamelijk zes dingen in aanmerking, namelijk de drie vlakke hoeken of zijvlakken en de drie standhoeken der tweevlakkige hoeken, die de zijvlakken met elkander maken. Wanneer men drie dezer zes dingen kent, zal men de drie overige kunnen construeren. Nu kunnen er gegeven zijn: 1°. de drie zijvlakken; 2°. twee zijvlakken met een' ingesloten' standhoek; 3°. twee zijvlakken met een' standhoek over een dezer zijvlakken; 4°. de drie standhoeken; 5°. een zijvlak met de twee aanliggende standhoeken; 6°. twee standhoeken met een zijvlak over een' dezer standhoeken; en in elk dezer zes gevallen kan men begeeren, de drie overige dingen te vinden.

§ 135. Beschouwt men den top van eenen drievlakkigen hoek als het middelpunt van eenigen bol, dan zullen de doorsneden der zijvlakken met het oppervlak dezes bols, bogen van groote cirkels zijn, die elkander snijden in de punten, waar de ribben van den drievlakkigen hoek door het oppervlak des bols gaan. Deze doorsneden zullen derhalve eenen bolvormigen driehoek vormen, waarvan de zijden overeenkomen met de zijvlakken des drievlakkigen hoeks, en waarvan de hoeken overeenkomen met de standhoeken dezer zijvlakken. Heeft men dus eenen drievlakkigen hoek in de bovenopgegevene gevallen geconstrueerd, dan zal men ook de drie overige dingen van den overeenkomstigen bolvormigen driehoek gevonden hebben, wanneer gegeven zijn: 1°. de drie zijden; 2°. twee zijden met een' ingesloten' hoek; 3°. twee zijden met een' hoek over eene dezer zijden; 4°. de drie hoeken; 5°. eene zijde met de twee aanliggende hoeken; 6°. twee hoeken met eene zijde over een' dezer hoeken.

§ 136. Wanneer men uit eenig punt van de gemeene doorsnede van twee vlakken, loodlijnen buitenwaarts op deze vlakken oprigt, dan laat zich gemakkelijk bewijzen, dat de hoek, dien deze loodlijnen te zamen maken, het supplement zal wezen van den standhoek dezer beide vlakken. Is nu TABC (fig. 69) een drievlakkige hoek, en trekt men uit T de lijnen TA′, TB′ en TC′, die buitenwaarts loodregt op de drie zijvlakken staan, dan zal de hoek A′TB′, dien de lijnen TA′ en TB′ maken, het supplement zijn van den standhoek der vlakken TBC en TAC, waarop deze lijnen loodregt staan. Even zoo zal hoek B′TC′ het supplement wezen van den standhoek der vlakken TAC en TAB, en hoek C′TA′ het supplement van den standhoek der vlakken TAB en TBC.

ıl dan de lijn TA, als loodregt staande op de lijnen TB′
k loodregt wezen op het vlak TB′C′; de lijn TB, als lood-
op de lijnen TC′ en TA′, zal loodregt wezen op het vlak
de lijn TC, als loodregt staande op de lijnen TA′ en TB′,
wezen op het vlak TA′B′. De hoek A′TB zal dus weder
ıent zijn van den standhoek der vlakken TB′C′ en TA′C′;
'C zal het supplement zijn van den standhoek der vlakken
A′B′, en de hoek CTA het supplement van den standhoek
TA′B′ en TB′C′.

it hetgeen in de vorige § is aangetoond, blijkt, dat de
TB′ en TC′ de ribben zullen wezen van eenen anderen
ı hoek TA′B′C′, waarin de vlakke hoeken de supplementen
standhoeken des drievlakkigen hoeks TABC, en waarin
ken de supplementen zijn van de zijvlakken des drievlak-
TABC. Het is hierom, dat de drievlakkige hoeken TABC
elkanders supplementaire drievlakkige hoeken genoemd worden.
alzoo de supplementaire drievlakkige hoek van TABC, en
supplementaire drievlakkige hoek van TA′B′C′.

eschouwt men het punt T als het middelpunt van eenigen
len de doorsneden der zijvlakken van de drievlakkige hoeken
A′B′C′ met het oppervlak dezes bols, twee bolvormige drie-
; en A′B′C′ vormen, waarin de zijden a′, b′ en c′ des twee-
lementen zullen wezen van de hoeken A, B en C des
vaarin de hoeken A′, B′ en C′ des tweeden de supplementen
van de zijden a, b en c des eersten. Deze bolvormige
ABC en A′B′C′ worden *elkanders pooldriehoeken* genoemd,
ıekpunten A, B en C des eersten, de polen zijn van de
en c′ des tweeden, en de hoekpunten A′, B′ en C′ des
polen zijn van de zijden a, b en c des eersten.

ewijl nu elke drievlakkige hoek zijnen supplementairen drie-
ıek, en dus ook elke bolvormige driehoek zijnen pooldriehoek
ı de zes werkstukken, die bij eenen drievlakkigen hoek
bij eenen bolvormigen driehoek (§ 135) kunnen voorko-
lechts tot drie verschillende bepalen. Weet men, b. v.,
drie standhoeken moet construeren, wanneer de drie vlakke
eenen drievlakkigen hoek gegeven zijn, dan zal men ook
nen de vlakke hoeken moet construeren, wanneer de stand-
ven zijn; want neemt men de supplementen van de gege-
ıeken als de zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek aan,
rt men de standhoeken van dezen laatsten, dan zullen de
ı van deze standhoeken de begeerde vlakke hoeken wezen.

het vierde geval (§ 134) tot het eerste kunnen terugbren-
ıo zal men het vijfde geval tot het tweede, en het zesde tot
ınnen herleiden.

'ERKSTUK. *De drie zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek ge-
de standhoeken der zijvlakken te construeren.*

3C (fig. 70) de drievlakkige hoek wezen, waarin de vlakke
ı, ATC en BTC gegeven zijn, en waarvan men de stand-
bepalen. Verbeeldt men zich daartoe, dat door een wille-

keurig punt A van de ribbe TA een vlak HS gebragt is, loodregt op die ribbe, dan zal dit vlak van den gegevenen drievlakkigen hoek eene regthoekige piramide afsnijden, waarin AC en AB loodregt staan op TA, en dus met elkander den standhoek BAC vormen, dien de zijvlakken ATC en ATB met elkander maken. Daar men nu voor AT eene willekeurige lijn kan aannemen, zoo zal men de regthoekige driehoeken ATB en ATC kunnen construeren, waardoor de betrekkelijke lengten van AB, BT, AC en TC bekend zullen worden. Verder zal men den driehoek BTC, door middel van de bekende zijden BT en TC en den ingesloten' hoek BTC, kunnen construeren, waardoor dan ook de betrekkelijke lengte van BC bekend zal worden. De betrekkelijke lengten van de zijden AB, AC en BC van den driehoek ABC alsdan bekend zijnde, kan men eindelijk dezen driehoek, en dus ook den gevraagden standhoek BAC construeren. Al deze constructiën kunnen nu in een der zijvlakken ATC of ATB worden uitgevoerd.

Rigt men namelijk uit een willekeurig punt A van de lijn PQ (fig. 71) eene loodlijn op; trekt men uit een willekeurig punt T van deze loodlijn, de lijnen TC en TB′ zoodanig, dat ATC en ATB′ gelijk zijn aan de gegevene aanliggende vlakke hoeken; beschrijft men verder op TC den driehoek TB″C, waarin hoek CTB″ gelijk aan den gegevenen overstaanden vlakken hoek en TB″ = TB′ is, en eindelijk op de lijn AC den driehoek ACB, waarin AB = AB′ en CB = CB″ is, dan zal BAC de standhoek wezen, dien de zijvlakken ATC en ATB met elkander maken.

§ 141. Vergelijkt men de constructie-figuur 71 met de perspectivische figuur 70, dan is het klaar, dat als AT in beide figuren even groot is, de constructie-figuur 71 de geheele ontwikkeling zal voorstellen van het oppervlak der piramide TABC van fig. 70 op het zijvlak ATC. Verbeeldt men zich namelijk, dat in fig. 70 de zijvlakken ATB, BTC en BAC respectievelijk om de ribben AT, TC en AC wentelen, tot dat zij in het vlak ATC zijn nedergekomen, dan zal men fig. 71 verkrijgen.

§ 142. Laat men door een willekeurig punt van de ribbe TC (fig. 70) een vlak gaan, loodregt op die ribbe, dan zal men van den drievlakkigen hoek TABC weder eene regthoekige piramide afsnijden; ontwikkelt men dezelve op een der zijvlakken, die volgens de ribbe TC aan elkander sluiten, dan zal men, op eene dergelijke wijze als in § 140 handelende, daardoor den standhoek vinden tusschen de zijvlakken ATC en BTC. Evenzoo zal men den standhoek kunnen vinden tusschen de zijvlakken ATB en CTB, door een vlak te brengen, loodregt op de ribbe TB, en de daardoor ontstane regthoekige piramide op een der zijvlakken, die volgens deze ribbe aan elkander sluiten, te ontwikkelen.

§ 143. Dewijl T (fig. 71) het punt is, waar de ribbe TB het vlak TAC snijdt, en B het punt, waar deze ribbe het vlak BAC snijdt, dat loodregt staat op TAC, zal men de projectie dezer ribbe op het vlak TAC verkrijgen, door het punt T te vereenigen met den voet *B* der loodlijn, die uit B op PQ wordt nedergelaten; terwijl die loodlijn B*B* de afstand zal wezen, waarop het punt B zich van het vlak TAC bevindt. Voorts is het klaar, dat AB de projectie is der ribbe

TB op het vlak BAC. Wordt nu BAC als het horizontale vlak aangenomen, en TAC als het verticale vlak, dat om de as van projectie PQ in het verlengde van het horizontale vlak is nedergeslagen, dan zal AB de horizontale, en T*B* de verticale projectie wezen van de ribbe TB, en deze kan nu weder geprojecteerd worden op elk ander vlak, dat loodregt op TAC wordt aangenomen. Door de oplossing van dit werkstuk leert men dus ook, om eene ribbe van eenen drievlakkigen hoek te projecteren op het overstaande zijvlak, alsmede op een vlak, dat loodregt staat op dit zijvlak.

§ 144. In de meetkunst is bewezen, dat in elken drievlakkigen hoek, de som van twee der vlakke hoeken grooter is dan de derde, en dat de som der drie vlakke hoeken kleiner is dan vier regte hoeken. Voldoen dus de drie gegevene vlakke hoeken niet aan deze voorwaarden, dan zullen zij geenen drievlakkigen hoek kunnen vormen. Dit wordt ook door de opgegevene constructie aangetoond; want zal dezelve slagen, dan moet de som van elke twee der lijnen AC, AB′ en B″C grooter zijn dan de derde. Hebben deze voorwaarden geen plaats, dan zullen ook de gegevene hoeken niet aan de boven opgegevene voorwaarden voldoen, en dus geenen drievlakkigen hoek kunnen vormen.

§ 145. Overeenkomstig het gezegde in § 135, kan men de vlakke hoeken van eenen drievlakkigen hoek altijd aanmerken, als gemeten wordende door de zijden van eenen bolvormigen driehoek, waarvan de hoeken overeenkomen met de standhoeken dezer zijvlakken. Men heeft dus ook nu het werkstuk leeren oplossen, om de hoeken van eenen bolvormigen driehoek te construeren, als deszelfs drie zijden gegeven zijn. Zijn, b. v., a, b en c de zijden, en A, B en C de overstaande hoeken van eenen bolvormigen driehoek ABC (fig. 69), dan zal, als men in fig. 71, B″TC = a, ATC = b en ATB′ = c neemt, de standhoek BAC = A zijn; terwijl de beide andere standhoeken, volgens § 142 geconstrueerd zijnde, de hoeken B en C zullen aanwijzen.

In de meetkunst is bewezen, dat de som van elke twee zijden eens bolvormigen driehoeks grooter is dan de derde, en dat de som der drie zijden kleiner is dan de omtrek van eenen grooten cirkel des bols, of kleiner dan vier regte hoeken. Zal dus het werkstuk mogelijk zijn, dan moeten de gegevene zijden aan deze beide voorwaarden voldoen, zijnde dezelfde, als die in de vorige § ten opzigte van eenen drievlakkigen hoek zijn opgegeven.

§ 146. Als men de kaart van een land wil opnemen, onderstelt men gewoonlijk, dat de merkwaardigste punten door regte lijnen met elkander verbonden zijn; deze lijnen vormen driehoeken, en het komt er dus op aan, deze driehoeken, door middel van eene kleinere schaal, op de kaart over te brengen, en dezelve ten opzigte van elkander juist zoodanig te rangschikken, als diegenen, welke zij voorstellen. De op het terrein te verrigtene werkzaamheden bestaan voornamelijk in het meten van de hoeken dezer driehoeken; en ten einde deze hoeken onmiddellijk op de kaart te kunnen overbrengen, moet elk derzelve in een horizontaal vlak gelegen zijn, hetwelk evenwijdig aan dat der kaart is. Heeft echter het vlak des hoeks eene helling tot den horizon, dan moet niet de hoek-zelf, maar zijne horizontale projectie worden

overgebragt, en deze projectie kan altijd gevonden worden, als n behalve den hoek-zelven, ook nog de hoeken gemeten heeft, w de verticaal, gaande door het hoekpunt, maakt met de beide be des hoeks. Dit werkstuk, dat bekend is onder den naam van: *de leiding eens hoeks tot den horizon*, kan nu ook door het geleerd § 140 worden opgelost.

Is, b. v., HS (fig. 70) het horizontale vlak, BTC de hoek in hellende vlak, dien men tot den horizon wil herleiden, en TA verticaal, zoodat ATC en ATB de hoeken zijn, die de verticaal m met de beenen TC en TB, dan zijn AC en AB de projectiën c beenen op het horizontale vlak, en hoek BAC is de projectie van BTC op dit vlak. De hoek BTC, herleid tot den horizon, is dus BAC, en hiervan moet de ware grootte bepaald worden.

Nu is het klaar, dat in den drievlakkigen hoek TBAC, geg zijn de vlakke hoeken BTC, ATC en ATB, en dat BAC de st hoek is, dien de zijvlakken ATC en ATB met elkander maken die, tegen over den hoek BTC in het hellende vlak, staat; constru men dus dezen standhoek volgens § 140, dan zal aan het beg voldaan wezen.

§ 147. Werkstuk. *Van eenen drievlakkigen hoek twee zijvlakken een' ingesloten' standhoek gegeven zijnde, het derde zijvlak en de twee ov standhoeken te construeren.*

Laat een der gegevene zijvlakken ATB′ (fig. 71) om de gem ribbe AT op het verlengde van het andere gegevene zijvlak ATC nedergeslagen; indien men dan uit een willekeurig punt A va gemeene ribbe AT eene loodlijn BC door deze gemeene ribbe tr zullen de lijnen AB′ en AC de beenen van den gegevenen stand zijn, die bij het in elkander brengen van de gegevene zijvlakke elkanders verlengde zijn komen te vallen. Maakt men dus hoek gelijk aan den gegevenen standhoek, dan zal BAC het standvlak stellen, wanneer het om de lijn AC in het verlengde van het zij ATC is nedergeslagen, en neemt men vervolgens AB = AB′, dar het punt B de betrekkelijke ligging aanwijzen van het punt B′, opzigte van de lijn AC, wanneer het zijvlak ATB′ tot zijnen tuurlijken stand is teruggebragt; of wel, de driehoek BAC is de werke grootte van de basis der driehoekige piramide, welke door het v dat door het punt A loodregt op de gemeene ribbe AT gebragt van den drievlakkigen hoek wordt afgesneden. Wanneer men du TC eenen driehoek TCB″ beschrijft, waarin TB″ = TB′ en CB″ = is, dan zal dezelve het vierde zijvlak van deze driehoekige pira wezen, en de onbepaalde lijn TB″ zal dus met TC den derden ken hoek CTB″ van den drievlakkigen hoek vormen.

De drie vlakke hoeken van den drievlakkigen hoek alzoo be zijnde, zal men de beide overige standhoeken volgens § 140 ku construeren.

De projectie van de ribbe BT op het overstaande zijvlak, kar weder (§ 143) gevonden worden, door T te vereenigen met den der loodlijn, die uit B op PQ valt.

§ 148. Door de oplossing van dit werkstuk zal al het overige

eenen bolvormigen driehoek door constructie kunnen bepaald worden, wanneer van denzelven twee zijden met den ingesloten' hoek gegeven zijn, want deze gegevens kunnen beschouwd worden, als twee zijvlakken met den ingesloten' standhoek te zijn van eenen drievlakkigen hoek.

§ 149. Werkstuk. *Van eenen drievlakkigen hoek gegeven zijnde twee zijvlakken met een' standhoek over een der zijvlakken, begeert men het derde zijvlak, en de overige standhoeken te construeren.*

Laat BTA en ATC (fig. 72) de twee gegevene zijvlakken zijn, die om de gemeene ribbe AT in elkanders verlengde zijn gebragt; trekt men dan uit een willekeurig punt B van de ribbe BT eene lijn BA loodregt op dezelve, en maakt men hoek ABA′ gelijk aan den gegevenen standhoek, die tegen over het zijvlak ATC staat, dan zal men, BTC als het horizontale vlak aannemende, het vlak, dat door BA en BA′ gaat, als het verticale vlak van projectie kunnen beschouwen. Daar alsdan TBP het derde zijvlak des drievlakkigen hoeks is, zal men in dit vlak eene lijn moeten bepalen, die met AT den gegevenen hoek ATC maakt. Onderstelt men dus, dat deze hoek ATC om het been AT omwentelt, tot dat het andere been TC in het vlak TBP komt te liggen, dan zal men, daar het punt T reeds in dit vlak gelegen is, nog slechts één pnnt van deze lijn TC behoeven te construeren, wanneer zij den gezegden stand heeft aangenomen.

Trekt men nu AC loodregt op AT, dan is het klaar, dat het punt C, gedurende de beweging van den hoek ATC om de lijn AT, eenen cirkel zal beschrijven, waarvan AC de straal is, en waarvan het vlak loodregt zal staan op AT, en dus ook loodregt op het horizontale vlak. Het vlak, waarin deze cirkel ligt, is dus CAA′, en de punten, waarin deze cirkel het vlak TBP doorsnijdt, met het punt T vereenigd zijnde, zullen den begeerden stand van de lijn TC aanwijzen. Deze punten moeten echter ook gelegen wezen in de gemeene doorsnede van de vlakken CAA′ en TBP, waarvan AC de horizontale, en BP de verticale projectie is; men zal dus slechts behoeven te bepalen, waar de cirkel, door het punt C doorloopen, de gemeene doorsnede van de vlakken CAA′ en TBP snijdt, en deze punten met T moeten vereenigen. Slaat men nu het vlak CAA′, waarin de cirkel en deze gemeene doorsnede gelegen zijn, om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak, dan zal men, daar de straal AC bij deze beweging niet van plaats verandert, den nedergeslagen' cirkel verkrijgen, door uit A, met AC als straal, eenen cirkel te beschrijven; en daar het vlak CAA′, als loodregt staande op het horizontale vlak, tevens het projecterend vlak is van de gemeene doorsnede (AC,BP), zal men de nedergeslagene gemeene doorsnede a d verkrijgen, door volgens § 65 deze lijn om derzelver horizontale projectie neder te slaan op het horizontale vlak. De punten E en e, waarin de gemeene doorsnede a d den cirkel, door het punt C doorloopen, snijdt, zijn derhalve de punten, gelegen in het vlak TBP, die, met T vereenigd, den begeerden stand van de lijn TC zullen aanwijzen.

Deze punten E en e liggen echter met het vlak CAA′ nedergeslagen op het horizontale vlak; wordt nu het vlak CAA′ weder opgeslagen, tot dat het in deszelfs oorspronkelijken stand loodregt staat op het horizon-

tale vlak, dan zullen E′ en e′ de horizontale projectiën dezer punten, en dus TE′ en Te′ de horizontale projectiën zijn van twee lijnen, gelegen in het vlak TBP, en die met AT den gegevenen hoek ATC maken. Omdat het vlak TBP loodregt staat op het verticale vlak, is het klaar, dat BP de verticale projectie van deze beide lijnen zal wezen.

De stand van de derde ribbe des drievlakkigen hoeks is dus nu geheel en al bepaald; wil men echter de werkelijke grootte van het derde zijvlak vinden, dan bepaalt men (§ 56) de punten F″ en f″, waarin de derde ribbe het verticale vlak snijdt. Verbeeldt men zich voorts, dat het derde zijvlak om de ribbe BT wentelt, tot dat het op het horizontale vlak ligt nedergeslagen, dan zullen de punten F″ en f″ gedurende die beweging altijd in het verticale vlak blijven, en cirkelbogen doorloopen, waarvan BF″ en Bf″ de stralen zijn. Beschrijft men dus deze cirkelbogen, en vereenigt men de punten C′ en c′, waar zij de as snijden, en waar dus F″ en f″ in het horizontale vlak nederkomen, met T; dan zal men het derde zijvlak C′TB of c′TB in deszelfs ware grootte nedergeslagen hebben op het horizontale vlak.

De drie zijvlakken van den drievlakkigen hoek alsnu bepaald zijnde, kan men de beide overige standhoeken volgens § 140 construeren.

§ 150. Bij deze constructie kunnen verschillende gevallen voorkomen: 1°. kan het gebeuren, dat de lijn a d den cirkel, door het punt C doorloopen, niet snijdt of raakt, hetwelk zal aantoonen, dat de gegevens zoodanig zijn, dat er onder dezelve geenen drievlakkigen hoek kan bestaan; 2°. kan de lijn a d den cirkel aanraken; alsdan zal er één drievlakkige hoek ontstaan, waarin het zijvlak ATC loodregt op het derde zijvlak staat; 3°. kan de lijn a d den cirkel in twee punten snijden, die beide boven GC, en dus beide boven het horizontale vlak gelegen zijn, zoo als in fig. 72 plaats vindt; in dit geval zullen er twee drievlakkige hoeken ontstaan, die aan de vraag beantwoorden; 4°. kan de lijn a d den cirkel in twee punten snijden, waarvan het eene boven, en het andere beneden GC, en dus het eene boven, en het andere beneden het horizontale vlak gelegen is; alsdan zullen er wel twee drievlakkige hoeken ontstaan, waarvan de eene boven, en de andere beneden het horizontale vlak zal liggen, maar in den laatsten zal de standhoek, over het zijvlak ATC staande, het supplement van den gegevenen standhoek ABA′ wezen, en deze zal dus niet aan de vraag beantwoorden; 5°. zal het, als de gegevene standhoek stomp is, kunnen gebeuren, dat de lijn a d den cirkel in twee punten snijdt, die beide beneden GC, en dus beide beneden het horizontale vlak gelegen zijn; in dit geval zullen er ook wel twee drievlakkige hoeken ontstaan, die beide beneden het horizontale vlak zullen liggen, maar waarin de standhoek, tegen over het zijvlak ATC staande, het supplement van den gegevenen zal wezen, en die dus beide niet aan de vraag beantwoorden.

§ 151. Door de oplossing van dit werkstuk kan weder al het overige van eenen bolvormigen driehoek door constructie bepaald worden, wanneer van denzelven twee zijden met een' hoek over eene dezer zijden gegeven zijn; want deze gegevens kunnen beschouwd worden, als twee zijvlakken met een' overstaanden standhoek te zijn van eenen drievlakkigen hoek.

52. Zijn de drie standhoeken van eenen drievlakkigen hoek ge-
en wil men de vlakke hoeken construeren, dan neemt men de
nenten van de gegevene standhoeken als de zijvlakken van eenen
kkigen hoek aan, en construeert volgens § 140 de standhoeken van
laatsten, dan zullen (§ 137) de supplementen van deze stand-
de begeerde vlakke hoeken wezen.

53. Zijn van eenen drievlakkigen hoek, een zijvlak met de twee
gende standhoeken gegeven, en wil men al het overige van den-
construeren, dan neemt men de supplementen van de gegevene
oeken als twee zijvlakken, en het supplement van het gegeven
als de ingesloten standhoek van eenen drievlakkigen hoek aan,
strueert, volgens § 147 en § 140, al het overige van dezen drie-
gen hoek, dan zal (§ 137) het supplement van het gevonden
zijvlak de begeerde derde standhoek, en de supplementen van de
ene standhoeken zullen de begeerde zijvlakken wezen.

54. Zijn eindelijk van eenen drievlakkigen hoek, twee standhoeken
en zijvlak over een' dezer standhoeken gegeven, en wil men al
erige van denzelven construeren, dan neemt men de supple-
n van de gegevene standhoeken als twee zijvlakken, en het sup-
nt van het gegeven zijvlak als de overstaande standhoek van eenen
kkigen hoek aan, en construeert, volgens § 149 en § 140, al
erige van dezen drievlakkigen hoek, dan zal (§ 137) het supplement
et gevonden derde zijvlak de begeerde derde standhoek, en de
nenten van de gevondene standhoeken zullen de begeerde zijvlak-
wezen.

55. Uit de, in § 135 opgemerkte, overeenkomst van eenen drie-
gen hoek met eenen bolvormigen driehoek blijkt, dat men volgens
al het overige van denzelven zal kunnen construeren, wanneer
n zijn de drie hoeken; volgens § 153, wanneer gegeven zijn eene
net de twee aanliggende hoeken; en volgens § 154, wanneer
n zijn twee hoeken met eene zijde over een' dezer hoeken.

OVER HET PROJECTEREN VAN VEELVLAKKIGE LIGCHAMEN, EN HET ONTWIKKELEN VAN DERZELVER OPPERVLAKKEN.

---

§ 156. Een begrensd vlak kan klaarblijkelijk geprojecteerd worden, door de projectiën te bepalen van deszelfs omtrek; want daar elk gedeelte dezes omtreks, hetzij eene regte of kromme lijn, door zijne projectiën volkomen bepaald is (§ 12), zoo heeft dit ook plaats met den geheelen omtrek. De projectiën van vlakke figuren, die door regte lijnen begrensd worden, b. v. die van een vierkant, worden dus verkregen, door de projectiën van deszelfs hoekpunten, op eene overeenkomstige wijze als in de gegevene figuur, met elkander te vereenigen. Om vlakke figuren, die door kromme lijnen begrensd worden, te projecteren, moeten er zooveel punten van den omtrek geprojecteerd worden, als ter bepaling van derzelver projectiën noodig zijn.

§ 157. Is er eene vlakke regtlijnige figuur gegeven, liggende in het horizontale vlak, en beweegt deze figuur zich om eene harer zijden, of om eene lijn in het horizontale vlak, tot dat het vlak dezer figuur eenen gegevenen hoek maakt met het horizontale vlak, dan zal men de projectiën der figuur in dezen stand kunnen bepalen, door de projectiën van derzelver hoekpunten volgens § 95 te construeren, en deze behoorlijk met elkander te vereenigen.

Was de gegevene figuur kromlijnig, dan zou men de projectiën van al derzelver punten moeten bepalen, hetgeen niet mogelijk is; hoe meer punten men echter projecteert, des te gemakkelijker en naauwkeuriger zullen hunne projectiën vereenigd kunnen worden.

§ 158. Beweegt zich met de figuur eene regte lijn, die eenen standvastigen hoek met het vlak der figuur maakt, dan kan men volgens § 105 bepalen, wat de projectiën dezer lijn na de opgegevene beweging zijn.

Maakt een begrensd plat vlak met de zich bewegende figuur eenen standvastigen hoek, dan zijn de zijden van dat vlak niet anders dan lijnen, die met het vlak der bewegende figuur standvastige hoeken maken, en derzelver projectiën na de beweging kunnen dus mede volgens § 105 bepaald worden.

§ 159. Reeds in § 22 is opgemerkt, dat men veelvlakkige ligchamen kan projecteren, door de projectiën van derzelver ribben te bepalen. Wanneer men het gezegde in de vorige § goed begrepen heeft en ook weet uit te voeren, zal het niet moeijelijk vallen, om een veelvlakkig ligchaam in verschillende standen ten opzigte der projectievlakken te projecteren; want de ribben en zijvlakken van het ligchaam zijn, met betrekking tot het bepaalde vlak, waarmede het ligchaam zich beweegt, niet anders dan in de de vorige § beschouwde lijnen of vlakken, welke met het

bewegende vlak eenen standvastigen hoek maakten, en in het algemeen hunnen stand ten opzigte van dat vlak, gedurende de beweging, niet veranderden. De volgende voorbeelden kunnen ter opheldering van het een en ander strekken.

§ 160. Werkstuk. *Eene vlakke regtlijnige figuur, gelegen in het horizontale vlak, beweegt zich om eene harer zijden zoolang opwaarts, tot dat zij met het horizontale vlak eenen gegevenen hoek maakt; men begeert hare projectiën in dezen stand te construeren.*

Men bepale volgens § 95 de projectiën van de hoekpunten der figuur, en vereenige die behoorlijk met elkander.

In plaats echter, van telkens door ieder hoekpunt het standvlak te laten gaan, dat den gegevenen hoek bevat, kan men gemakshalve dit standvlak ergens buiten de figuur loodregt op de omwentelings-as stellen, en door lijnen, evenwijdig aan die as, al de gegevene hoekpunten op dit standvlak overbrengen.

Is, b. v., ABCDE (fig. 73) de gegevene figuur, en h de hoek, dien het vlak dezer figuur na de beweging moet maken met het horizontale vlak, dan trekke men eene lijn PQ, loodregt op AB, en make hoek PQR gelijk aan den gegevenen hoek h. Merkt men nu op, dat de punten C, D en E, gedurende de beweging van het vlak, cirkelbogen doorloopen, welker vlakken loodregt staan op AB, en waarvan CF, DG en EH de stralen zijn, dan blijkt reeds dadelijk, dat de horizontale projectiën dezer punten, na de beweging, in de lijnen CF, DG en EH moeten gelegen wezen. Beschouwt men verder PQR als een nieuw verticaal vlak van projectie, dat om PQ op het horizontale vlak is nedergeslagen, dan zal het gemakkelijk vallen, de punten C, D en E vooreerst op dit vlak PQR te projecteren; want het vlak der figuur, waarin de punten C, D en E gelegen zijn, loodregt staande op PQR, moeten de projectiën dezer punten op dat vlak (§ 41), alle in de lijn QR gelegen zijn, die als de nieuwe verticale doorgang van het vlak der figuur is aan te merken. Beschrijft men dus uit Q cirkelbogen, met CF, DG en EH als stralen, dan zullen c, d en e de projectiën zijn van de punten C, D en E op het vlak PQR, en de horizontale projectiën dezer punten, worden nu volgens het boven opgemerkte en § 23 verkregen, door uit c, d en e loodlijnen op PQ te trekken, en de snijpunten C′, D′ en E′ dezer loodlijnen met de lijnen CF, DG en EH te bepalen. ABC′D′E′, is alzoo de gevraagde horizontale projectie der figuur, na de opgegevene beweging. Daar verder dk de afstand is, waarop het punt D zich na de beweging boven het horizontale vlak bevindt, en even zoo met de andere punten, zoo zal men, door uit C′, D′ en E′ loodlijnen op de as van projectie te trekken, en deze gevondene afstanden boven dezelve uit te zetten, $ABC''D''E''$ voor de gevraagde verticale projectie bekomen.

Men zal volmaakt op dezelfde wijze moeten handelen, om de projectiën der figuur te bepalen, wanneer er gegeven is, dat zij zich, niet om eene harer zijden, maar om eene willekeurige lijn in het horizontale vlak moet bewegen.

§ 161. Werkstuk. *Eene kromlijnige figuur, gelegen in het horizontale vlak, beweegt zich om eene gegevene lijn zoolang opwaarts, tot dat zij met*

het horizontale vlak eenen gegevenen hoek maakt: men begeert derzelver projectiën in dezen stand te bepalen.

Handelt men met de punten dezer kromme lijn even als in de vorige §, en vereenigt men de gelijknamige projectiën dezer punten, op eene overeenkomstige wijze als zij in de gegevene figuur vereenigd zijn, dan zal men de begeerde projectiën bekomen.

Is, b. v., de kromme lijn een cirkel (fig. 74), welks vlak zich om de lijn BS' moet bewegen, en PQR de gegevene hoek, zoodat $B''BB'$ de stand van het vlak des cirkels is na de beweging, dan zal, volgens de constructie, die in de vorige § verklaard is, A' de horizontale en A'' de verticale projectie van het punt A zijn, na de opgegevene beweging; en even zoo kunnen de projectiën van elk ander punt bepaald worden.

§ 162. Dewijl de projectiën van eenen cirkel, gelegen in een hellend vlak, beide ellipsen zijn, zoo komt het er in dit geval slechts op aan, de assen dezer ellipsen te bepalen, en daardoor die ellipsen zelven te construeren. Wat de assen van de horizontale projectie betreft, is het klaar, dat de middellijn des cirkels, die evenwijdig loopt aan het horizontale vlak, zich op het langst zal projecteren, en dus door hare projectie de groote as zal aanwijzen; terwijl de middellijn, die loodregt is op deze evenwijdige middellijn, of den grootsten hoek maakt met het horizontale vlak, zich op het kortst zal projecteren, en dus door hare projectie de kleine as zal opleveren; immers de projectie eener in lengte bepaalde regte lijn op een plat vlak, is gelijk aan de lengte dezer lijn, vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welken de lijn met dit vlak maakt: hoe grooter nu die hoek is, hoe kleiner deszelfs cosinus, en hoe kleiner dus ook de projectie der lijn zal wezen. Daar nu de middellijn, die evenwijdig loopt aan het horizontale vlak, zich (§ 32) in hare ware grootte, evenwijdig aan den horizontalen doorgang projecteert, zoo zal, als men (§ 160) de projectiën O' en O'' van het middelpunt O construeert, en op de lijn, die door het punt O' evenwijdig aan BS' getrokken wordt, $O'L' = O'M' = OC$ neemt, $M'L'$ de groote as zijn van de ellips, volgens welke de cirkel zich op het horizontale vlak projecteert. Daar verder G de projectie is van het middelpunt des cirkels op het vlak PQR, wanneer het vlak des cirkels den vereischten stand heeft aangenomen, zoo zal, als men $GL = GF = OC$ neemt, LF de projectie op het vlak PQR zijn, van de middellijn, die den grootsten hoek maakt met het horizontale vlak, en derzelver horizontale projectie $E'F'$ zal dus de kleine as van de begeerde ellips wezen, die nu gemakkelijk kan geconstrueerd worden.

Om de assen te construeren van de ellips, volgens welke de cirkel zich op het verticale vlak projecteert, kan men op dezelfde wijze redeneren, als hier boven ten opzigte van het horizontale vlak gedaan is. Trekt men namelijk $O''R''$ loodregt op BB'', en neemt men $O''H = O'H$, dan zal, als men $R''H$ trekt, $O''R''H$ de hoek wezen, dien het vlak des cirkels, in den begeerden stand gekomen, met het verticale vlak maakt; neemt men dus op de lijn, die door het punt O'' evenwijdig aan BB'' getrokken wordt, $O''N'' = O''P'' = OC$, dan zal $N''P''$ de groote as, en als men $HI = HK = OC$ neemt, zal $I''K''$ de kleine as wezen van de ellips, die de verticale projectie van den gegevenen cirkel is.

§ 163. Werkstuk. *Het grondvlak van eene piramide gegeven zijnde, die op het horizontale vlak staat, benevens de projectiën van derzelver top, vraagt men deze piramide te projecteren.*

Bepaalt men de verticale projectiën van de hoekpunten des grondvlaks, en vereenigt men die door regte lijnen met de verticale projectiën van den top, dan verkrijgt men de verticale projectiën van de ribben der piramide, en door op dezelfde wijze de horizontale projectie van den top met de hoekpunten des grondvlaks te vereenigen, zal men derzelver horizontale projectiën bekomen.

Is, b. v., A'B'C'D' (fig. 75) het grondvlak eener piramide, staande op het horizontale vlak, en zijn E', E'' de projectiën van derzelver top, dan zijn *A*, *B*, *C* en *D* de verticale projectiën van de hoekpunten des grondvlaks, en dus *A*E'', *B*E'', *C*E'' en *D*E'' de verticale projectiën van de ribben, terwijl A'E', B'E', C'E' en D'E' derzelver horizontale projectiën zullen wezen.

§ 164. Werkstuk. *Wanneer eene piramide gesneden wordt door een vlak, dat loodregt is op het verticale vlak, vraagt men de projectiën der doorsnede te bepalen, dezelve in hare ware gedaante en grootte op een der projectievlakken neder te slaan, en het oppervlak der piramide, alsmede de doorsnede, te ontwikkelen.*

Laat ABCDE (fig. 75) de gegevene piramide zijn, en F''*K*L' het snijdende vlak; dan is, omdat dit vlak loodregt is op het verticale vlak, F''H'' de verticale projectie der doorsnede, en de punten F'', G'', H'' en I'' zijn de verticale projectiën van derzelver hoekpunten, dat is, van de punten, waarin het vlak F''*K*L' door de ribben der piramide gesneden wordt. De horizontale projectiën dezer punten liggen in A'E' B'E' enz., en worden dus verkregen, door uit F'', G'' enz. loodlijnen op de as van projectie neder te laten. Hierdoor wordt de horizontale projectie F'G'H'I' der doorsnede bepaald.

De ware gedaante en grootte van de doorsnede wordt het gemakkelijkst verkregen, door het vlak F''*K*L' om deszelfs verticalen doorgang op het verticale vlak neder te slaan, dewijl men dan slechts op F''*K*, uit F'', G'', I'' en H'', loodlijnen behoeft op te rigten, die gelijk zijn aan de afstanden, waarop de hoekpunten der doorsnede van het verticale vlak staan. FGHI is alzoo de nedergeslagene doorsnede.

Wilde men deze doorsnede om L'*K* op het horizontale vlak nederslaan, dan zou men uit H', I', G' en F' loodlijnen op L'*K* moeten nederlaten, en deze loodlijnen, van derzelver voetpunten af, gelijk moeten maken aan H''*K*, I''*K*, G''*K* en F''*K*.

Om het oppervlak der piramide te ontwikkelen, behoeft men slechts elk zijvlak om deszelfs horizontalen doorgang neder te slaan, en de daardoor verkregene driehoeken behoorlijk naast elkander te plaatsen. Het is echter even gemakkelijk, om de ware lengten der ribben te construeren, en alsdan de driehoeken dadelijk naast elkander te plaatsen. Heeft men deze lengten bepaald, dan neme men AB = A'B', en beschrijve uit A en B, met de ware lengten der ribben AE en BE als stralen, cirkelbogen, die elkander in den top E zullen snijden. Uit E beschrijve men voorts, met CE als straal, eenen cirkelboog, en uit B, met B'C' als straal, eenen anderen, dan wordt het punt C bepaald.

Op deze wijze voortgaande, zal men de geheele ontwikkeling van het oppervlak der piramide verkrijgen.

Om de doorsnede in deze ontwikkeling over te brengen, make men slechts AF, BG enz. gelijk aan de ware lengten van de ribben der afgeknotte piramide. Men kan echter ook, om deze doorsnede te ontwikkelen, F'Q' loodregt op A'B' trekken, en AQ = A'Q' nemen; de loodlijn QF, uit Q op AB opgerigt, snijdt alsdan de ribbe AE in het punt F van de ontwikkelde doorsnede. Daar verder de ware lengten van de zijden der doorsnede, bij het nederslaan van dezelve op het verticale vlak, reeds geconstrueerd zijn, zoo beschrijve men uit F, met FG als straal, eenen cirkelboog, die de ribbe BE in het punt G zal snijden, voorts uit G, met GH als straal, eenen cirkelboog, die CE in H zal snijden, enz.

§ 165. Het is gemakkelijk in te zien, dat men uit de projectiën eener afgeknotte piramide, die van de geheele piramide zal verkrijgen, door de projectiën van de ribben te verlengen, tot dat zij elkander snijden. Dit moet klaarblijkelijk in hetzelfde punt plaats hebben, en dit punt is alsdan de projectie van den top op het overeenkomstige projectievlak. De beide punten, waarin de projectiën der ribben op elk der projectievlakken elkander snijden, moeten dus in eene lijn gelegen wezen, die (§ 23) loodregt door de as van projectie gaat. Wil men derhalve de projectiën van eene afgeknotte piramide aannemen, dan moeten zij aan deze voorwaarde voldoen.

§ 166. Wordt eene piramide door een willekeurig vlak gesneden, en wil men alsdan de doorsnede projecteren, omslaan en ontwikkelen, dan zoekt men, volgens § 82, de projectiën van de punten, waarin de ribben het vlak snijden; verbindt men die behoorlijk met elkander, dan verkrijgt men de projectiën der doorsnede.

Het omslaan der doorsnede en de ontwikkeling van het oppervlak der piramide, geschiedt voorts volgens § 95 en § 164.

§ 167. Werkstuk. *Een cubus, die op het horizontale vlak staat, beweegt zich eerst om eene zijner onderste ribben, en dan uit dezen stand, op een der uiteinden van deze ribbe zoodanig, dat die ribbe in een verticaal vlak blijft: men begeert de projectiën van den cubus in beide standen te bepalen.*

Dit werkstuk kan door toepassing van het geleerde in § 95 en § 105 worden opgelost; om echter de figuur niet te zamengesteld te maken, zal hier aangetoond worden, hoe men de daartoe noodige constructiën in afzonderlijke figuren kan uitvoeren.

Laat het vierkant a b c d (fig. 76 *a*) het grondvlak van den cubus wezen, a b de ribbe, om welke hij zich het eerst, en a het punt, waarop hij zich vervolgens beweegt, dan is het vierkant a d h e (fig. 76*b*) de projectie van dezen cubus op een verticaal vlak, dat door a d gaat. Verschuift men dit vierkant om het punt a zoolang, tot dat de hoek t gelijk is aan dien, welken het grondvlak van den cubus na zijne eerste beweging met het horizontale vlak moet maken, dan komt het in den schuinschen stand a d h e, en nu toonen de afstanden a i, a k, a l, b i, b k en b l aan, hoe ver de projectiën der punten d, e, h, c, f en g (fig. 76 *a*), in de rigting der lijnen a d en b c, van de lijn a b verwijderd zijn; terwijl de loodlijnen c i, d i, e k, f k, g l en

h l (fig. 76 *b*) de hoogten van de punten c, d, e, f, g en h boven het horizontale vlak aanwijzen. Worden deze afstanden, van de overeenkomstige punten a en b (fig, 76 *a*) af aan, op de lijnen a d en b c, aan beide zijden van a b, behoorlijk uitgezet, b. v. a i van a tot d′, a k van a tot e′, enz. dan verkrijgt men voor de horizontale projectie van den cubus, den regthoek e′ah′d′c′g′bf′. Trekt men nu uit al de punten e′, a, h′, enz., loodlijnen op de as van projectie, en worden boven dezelve, op deze loodlijnen de hoogten uitgezet, die deze punten na de beweging boven het horizontale vlak verkregen hebben, dan bekomt men de punten e″, a″, h″, enz., en door deze behoorlijk te vereenigen, de verticale projectie a″b″c″d″e″f″g″h″ van den cubus, na zijne eerste beweging.

Projecteert men vervolgens den cubus op een verticaal vlak, dat door a b gaat, dan ontstaat de regthoek a b g h (fig. 76 *c*), waarvan de eene zijde a b de ribbe van den cubus, en de andere zijde de loodlijn g l uit fig. 76 *b*. is, terwijl de ribben c d en f e, door middel van hare hoogten c i en e k uit fig. 76 *b*., daarop zijn overgebragt. Verschuift men nu dezen regthoek om het punt a zoolang, tot dat de hoek v gelijk is aan dien, welken de ribbe a b, na de tweede beweging van den cubus, met het horizontale vlak moet maken, dan toonen de afstanden b m, b n, a o, a p, b q, b r en a s achtervolgens aan, hoe ver de projectiën b, c′, d′, e′, f′, g′ en h′ zich in de rigting der beweging verplaatsen. Men verkrijgt alzoo, door deze afstanden uit te zetten, de projectiën B′, C′, D′, E′, F′, G′ en H′, en gevolgelijk ook de horizontale projectie aB′C′D′E′F′G′H′ van den cubus. De loodlijnen b m, c n, d o, e p, f q, g r en h s toonen weder de hoogten aan, die de hoekpunten b, c, d, e, f, g en h van den cubus, na de tweede beweging boven het horizontale vlak hebben. Door middel van deze hoogten en de projectiën B′, C′, enz., bepaalt men nu weder, even als boven, de verticale projectiën B″, C″ enz. van de hoekpunten, en gevolgelijk ook de verticale projectie a″B″C″D″E″F″G″H″ van den cubus.

Dewijl de gelijknamige projectiën van de tegen over elkander staande ribben evenwijdig moeten zijn (§ 37), zoo is dit een middel, om de deugdelijkheid der constructie te beproeven.

§ 168. Werkstuk. *Eene afgeknotte piramide, op het horizontale vlak staande, beweegt zich zoodanig op een der hoekpunten van het grondvlak, dat als men door dit hoekpunt eene lijn trekt in het horizontale vlak, de overige hoekpunten cirkelbogen doorloopen, die loodregt staan op deze lijn; zoo nu het grondvlak na die beweging eenen gegevenen hoek moet maken met het horizontale vlak, vraagt men de afgeknotte piramide in dezen stand te projecteren.*

Handelt men met de punten van het grondvlak volgens § 95, en met de punten van het bovenvlak volgens § 105, dan zal men, de projectiën behoorlijk vereenigende, de begeerde projectiën verkrijgen.

Laat a′b′c′d′e′f′, a″b″c″d″e″f″ (fig. 77) de afgeknotte piramide zijn, b′ het hoekpunt van het grondvlak a′b′c′, waarop de piramide zich moet bewegen, en k b′p de lijn, waarop de cirkelbogen, door de overige hoekpunten doorloopen, altijd loodregt moeten blijven. Merkt men nu op, dat de begeerde horizontale projectiën der hoekpunten elk in het

bijzonder gelegen moeten wezen in de loodlijnen, die uit de oorspronkelijke horizontale projectiën op de lijn k p vallen, dan zal het er slechts op aankomen, om te bepalen, hoe ver deze projectiën zich na de opgegevene beweging zullen verplaatst hebben. Maakt men daartoe a b h gelijk aan den gegevenen hoek, dien het grondvlak met het horizontale vlak moet maken, en neemt men b a en b c gelijk aan de loodlijnen, die uit a′ en c′ op k p vallen, dan zullen de afstanden b h en b i achtervolgens aanwijzen, hoe ver de projectiën der punten A en C zich boven de lijn k p moeten bevinden; terwijl de loodlijnen a h en c i de hoogten dezer punten boven het horizontale vlak aantoonen. Door deze afstanden en hoogten behoorlijk uit te zetten, zal A′b′C′ de horizontale, en A″b″C″ de verticale projectie van het grondvlak worden. Om verder de projectiën van het bovenvlak te bepalen, neemt men b e, b f en b d gelijk aan de loodlijnen, die uit e′, f′ en d′ op k p vallen, en rigt op b a uit e, f en d loodlijnen ee, ff en dd op, die gelijk zijn aan de afstanden, die de hoekpunten van het bovenvlak aanvankelijk van het horizontale vlak hadden, dan zullen de afstanden b k, b l, b n aantoonen, hoe ver de horizontale projectiën der punten F, D, E zich beneden de lijn k p moeten bevinden; terwijl de loodlijnen f k, d l, en de hoogten dezer punten boven het horizontale vlak zullen aanwijzen. Door deze afstanden en hoogten weder behoorlijk uit te zetten, zal D′E′F′ de horizontale, en D″E″F″ de verticale projectie worden van het bovenvlak, zoodat A′b′C′D′E′F′ en A″b″C″D″E″F″ de begeerde projectiën van de afgeknotte piramide na de opgegevene beweging zullen wezen.

§ 169. Deze weinige voorbeelden zullen genoegzaam wezen, om in te zien, op welke wijze men veelvlakkige ligchamen in het algemeen, en in verschillende standen ten opzigte der projectievlakken, benevens hunne doorsneden met platte vlakken, moet voorstellen. Heeft men het voorgaande goed begrepen, dan zal men zich, bij het projecteren van zoodanige ligchamen in andere voorkomende gevallen, gemakkelijk kunnen te regt helpen.

Wij zullen deze afdeeling eindigen met het bewijzen van eenige stellingen, de projectiën betreffende, en die in de analytische meetkunst van dienst kunnen zijn.

§ 170. *Wordt een punt in de ruimte op drie elkander loodregt snijdende vlakken geprojecteerd, dan zal de som der vierkanten van deszelfs projecterende lijnen gelijk zijn aan het vierkant van den afstand, dien het punt heeft tot het snijpunt dezer drie vlakken.*

Laat, b. v., BAC, BAD en DAC (fig. 78) de drie op elkander loodregt staande vlakken wezen, en P het punt in de ruimte, dan zijn PQ, PR en PS deszelfs projecterende lijnen.

Nu is $AP^2 = PQ^2 + AQ^2$;

maar $AQ^2 = QT^2 + AT^2$

zijnde, zoo heeft men $AP^2 = PQ^2 + QT^2 + AT^2$;

hierin $QT = PR$, en $AT = PS$ stellende, verkrijgt men

$$AP^2 = PQ^2 + PR^2 + PS^2,$$

waardoor het gestelde bewezen is.

§ 171. *De som der vierkanten van de cosinussen der hoeken, welke een*

vlak maakt met drie op elkander loodregt staande vlakken, is gelijk aan de eenheid.

Laat BAC, BAD en DAC (fig. 79) de drie onderling loodregte vlakken, en BCD het snijdende vlak zijn; wannneer men dan uit A eene lijn AP loodregt op het snijdende vlak laat vallen, en door AP de drie projecterende vlakken APU, APT en APV brengt, dan zijn de hoeken U, T en V de standhoeken van de tweevlakkige hoeken, welke het snijdend vlak met de drie loodregte vlakken maakt; en daar de driehoeken AUP, ATP en AVP alle regthoekig zijn in P, zoo zijn de hoeken PAU, PAT en PAV de complementen van de hoeken U, T en V.

Laat men nu PQ, PR en PS loodregt op de drie vlakken vallen, dan is

$$PQ = AP.\cos U, \quad PR = AP.\cos T, \quad PS = AP.\cos V,$$

en dus $PQ^2 + PR^2 + PS^2 = AP^2 (\cos^2 U + \cos^2 T + \cos^2 V)$;

maar dewijl (§ 170) $PQ^2 + PR^2 + PS^2 = AP^2$

is, zoo heeft men $AP^2 = AP^2 (\cos^2 U + \cos^2 T + \cos^2 V)$;

of, deze laatste vergelijking door AP^2 deelende,

$$\cos^2 U + \cos^2 T + \cos^2 V = 1,$$

waardoor het gestelde bewezen is.

§ 172. *Wanneer eene willekeurige vlakke figuur op een ander vlak geprojecteerd wordt, zal de inhoud van deze projectie gelijk zijn aan den inhoud van de oorspronkelijke figuur, vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welken het vlak dezer figuur met het vlak van projectie maakt.*

Laat ABCD (fig. 80) een trapezium zijn, waarvan de zijden AB en CD loodregt staan op de gemeene doorsnede GK van de vlakken GH en GI, en zij A′B′C′D′ de projectie van dit trapezium op het vlak GH, dan is E = F de standhoek der beide vlakken, en EF de hoogte van beide trapeziums ABCD en A′B′C′D′; men heeft dus

$$\text{Inh. } A'B'C'D' = \tfrac{1}{2}(A'B' + C'D')\,EF;$$

maar $A'B' = AB.\cos E$ en $C'D' = CD.\cos E$

zijnde, is $\text{Inh. } A'B'C'D' = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,EF.\cos E$;

daar nu $\tfrac{1}{2}(AB + CD)\,EF = \text{Inh. } ABCD$

is, zoo heeft men ook: $\text{Inh. } A'B'C'D' = \text{Inh. } ABCD \times \cos E$.

Het bovenstaande bewijs gaat ook door voor eenen willekeurigen driehoek ABC (fig. 81), gelegen in een vlak, dat met het vlak van projectie eenen willekeurigen hoek maakt; want trekt men AE en CF loodregt op de gemeene doorsnede GK der vlakken, en door B eene lijn LM, evenwijdig met AC, dan is het klaar, dat, zoowel in de projectie, als in de gegevene figuur, de driehoek ABC de helft zal zijn van het parallelogram ACLM. Daar nu dit parallelogram als een trapezium kan beschouwd worden, dat in dezelfde omstandigheden van het bewezene geval verkeert, zoo moet ook de betoogde eigenschap zoowel op het halve als op het geheele trapezium doorgaan.

Dewijl elke figuur in driehoeken kan worden verdeeld, zoo volgt hieruit verder, dat de opgegevene stelling algemeen is, en dus op alle figuren kan toegepast worden.

§ 173. Uit hetgeen in de beide voorgaande §§ bewezen is, blijkt, dat *als men eenige vlakke figuur op drie onderling loodregte vlakken projecteert, de som der vierkanten van de inhouden dezer projectiën gelijk zal zijn aan het vierkant van den inhoud der gegevene figuur.*

Laat namelijk de inhoud van de figuur door A, en de inhou van de drie projectiën door B, C en D worden voorgesteld; laat ver U, T en V de hoeken zijn, die het vlak der figuur met de drie p jectievlakken maakt, dan heeft men volgens de vorige §,

$$B = A.\cos U, \quad C = A.\cos T, \quad D = A.\cos V,$$

en dus ook $B^2 + C^2 + D^2 = A^2(\cos^2 U + \cos^2 T + \cos^2 V)$;
maar volgens § 171, is $\cos^2 U + \cos^2 T + \cos^2 V = 1$,
en hierdoor wordt $B^2 + C^2 + D^2 = A^2$.

Het vierkant van een vlak is eene oneigenlijke uitdrukking, omdat geene grootheden bestaan, die meer dan drie afmetingen hebben. M moet dus door de opgegevene stelling eigenlijk verstaan, dat de twe magt van het aantal vierkante eenheden, in de figuur begrepen, gel is aan de som der tweede magten van de getallen, welke de aantal vlakte-eenheden uitdrukken, die in de projectiën begrepen zijn.

OVER DEN BOL,
EN OPLOSSING VAN WERKSTUKKEN, DAARTOE BETREKKELIJK.

---

§ 174. De projectie van eenen bol op eenig vlak is een cirkel, waarvan het middelpunt is de projectie van het middelpunt des bols, en waarvan de straal gelijk is aan den straal des bols.

De projectiën van punten in het oppervlak eens bols op eenig willekeurig vlak, kunnen niet buiten den cirkel genomen worden, welke de projectie van den bol op dit vlak voorstelt; want brengt men door het middelpunt van den bol een vlak, evenwijdig aan het projectievlak, dan snijdt dit vlak den bol volgens eenen grooten cirkel, en laat men uit al de punten van dezen grooten cirkel, loodlijnen op het projectievlak vallen, dan vormen deze loodlijnen het oppervlak van eenen cilinder, die om den bol beschreven is, en die het projectievlak volgens eenen cirkel doorsnijdt, welke gelijk aan den grooten cirkel van den bol is, en de projectie van het middelpunt des bols tot straal heeft. Deze cirkel nu, is de projectie van den bol op het projectievlak, en daar al de punten van het oppervlak des bols binnen het oppervlak van den cilinder gelegen zijn, moeten ook derzelver projectiën binnen het grondvlak van dezen cilinder vallen.

Verder is het klaar, dat elke projectie, niet gelegen op den omtrek van de projectie des bols, altijd tot twee verschillende punten van het oppervlak zal behooren; want de loodlijn, die uit zoodanige projectie op het projectievlak wordt opgerigt, zal het oppervlak des bols in twee punten snijden, die beide den voet dezer loodlijn tot projectie hebben.

§ 175. Werkstuk. *De projectiën van eenen bol gegeven zijnde, vraagt men deszelfs oppervlak te construeren, dat wil zeggen, de horizontale projectie van eenig punt in dit oppervlak gegeven zijnde, deszelfs verticale projectie te bepalen, en omgekeerd.*

Laat (M′, M″) (fig. 82) het middelpunt zijn eens bols, en P′ de horizontale projectie van eenig punt in deszelfs oppervlak, waarvan men de verticale projectie wil bepalen, dan zal het er slechts op aan komen, den afstand van dit punt tot het horizontale vlak te vinden, omdat men weet, dat de verticale projectie gelegen moet wezen in de loodlijn, die uit P′ op de as van projectie wordt opgerigt. Vereenigt men nu de punten P′ en M′, dan is P′M′ de horizontale doorgang van een verticaal vlak, dat door het te bepalen punt en het middelpunt des bols gaat. Dit verticale vlak snijdt dus het oppervlak des bols volgens eenen grooten cirkel, op welks omtrek het te bepalen punt gelegen is; stelt men nu M′M = MM″, loodregt op P′M′, beschrijft men uit M

5.

eenen cirkel, gelijk aan den gegevenen grooten cirkel des bols, en trek men P'P loodregt op P'M', dan verkrijgt men dit verticale vlak, op het horizontale vlak nedergeslagen, en dan zal P'P den afstand aanwijzen dien het gevraagde punt van het horizontale vlak heeft. Wordt alzo op de loodlijn, die uit P' op de as van projectie getrokken is, $PP'' = P'P$ genomen, dan zullen P'' de verticale projectiën zijn van de punten de oppervlaks, die P' tot horizontale projectie hebben.

§ 176. Men kan zich ook verbeelden, dat het vlak P'M'M van zijne plaats genomen, en op het verticale vlak van projectie gelegd wordt zoodanig, dat de regte hoek P'M'M op den regten hoek PMM'' valt alsdan zullen al de constructiën, welke in het eerste vlak moeten worden uitgevoerd, welk vlak voor ieder verschillend punt P' van stand verandere, op het verticale vlak van projectie overgebragt zijn, dat nu voor alle gevallen hetzelfde blijft. Neemt men dus in dit geval $Mp = M'P'$ en rigt men op Mp uit p eene loodlijn op, die de verticale projectie van den bol in twee punten p'' doorsnijdt, dan zullen ook pp'' de afstanden zijn, die de gevraagde punten van het horizontale vlak hebben. Trekt men alzoo uit P' eene loodlijn op de as, en door de punten p lijnen evenwijdig met de as, dan worden de verticale projectiën P'' van de punten des oppervlaks bekend, waarvan P' de horizontale projectie is.

Op dezelfde wijze zal men ook de horizontale projectie kunnen bepalen, wanneer een punt in het verticale vlak als de verticale projectie van eenig punt in het oppervlak des bols wordt aangenomen.

§ 177. Werkstuk. *De punten te bepalen, waarin eene regte lijn eenen bol snijdt.*

Laat men uit het middelpunt van den gegevenen bol eene loodlijn vallen op de gegevene lijn (§ 110), construeert men de lengte van deze loodlijn (§ 57), en vervolgens eenen regthoekigen driehoek, waarvan de loodlijn eene der regthoekszijden, en de straal des bols de hypothenuse is, dan zal de andere regthoekszijde dezes driehoeks den afstand aantoonen, waarop de gezochte snijpunten zich in de gegevene lijn van de voet der geconstrueerde loodlijn moeten bevinden. Construeert men die in de gegevene lijn, door dezelve om eene harer projectiën op het overeenkomstige projectievlak neder te slaan, twee punten, die van de voet der loodlijn op den gevondenen afstand staan, dan zullen deze de begeerde snijpunten van de lijn met den bol wezen.

Merkt men echter op, dat de doorsneden van een' bol met vlakken die loodregt op een der projectievlakken staan, cirkels zijn, waarvan de middelpunten op denzelfden afstand van het projectievlak staan, als het middelpunt van den bol, dan kan men de constructie van dit werkstuk gemakkelijker uitvoeren, door de gegevene lijn om eene van derzelver projectiën neder te slaan op het overeenkomstige projectievlak, want dan zal men in het nedergeslagen projecterend vlak der lijn ook den cirkel kunnen bepalen, volgens welken dit projecterend vlak den bol snijdt, en de snijpunten der gegevene lijn met dien cirkel zullen dan klaarblijkelijk de begeerde punten zijn, waarin de gegevene lijn den bol snijdt.

Is, b. v., (C'D', C''D'') (fig. 83) de gegevene lijn, en (M', M'') het middelpunt van den gegevenen bol, en wil men bepalen, waar deze lijn den bol snijdt, dan slaat men de gegevene lijn om derzelver horizontale

projectie neder op het horizontale vlak (§ 65), als wanneer EF de nedergeslagene lijn, en EE'D' derzelver nedergeslagen projecterend vlak zal wezen. Dit projecterend vlak snijdt den bol volgens eenen cirkel, waarvan de straal gelijk is aan G'I' = ½ L'I', terwijl G' de horinzontale projectie van het middelpunt is. Daar nu het middelpunt van dezen cirkel op denzelfden afstand van het horizontale vlak staat, als het middelpunt des gegevenen bols, zal men den nedergeslagen' cirkel bekomen, door uit G' op C'D' eene loodlijn G'G = M'M'' op te rigten, en uit G, met G'I' als straal, eenen cirkel te beschrijven. De punten H en h, waarin de lijn EF dezen cirkel snijdt, zijn dan de begeerde snijpunten van de lijn met den bol, welke snijpunten echter met de lijn, waarin zij liggen, op het horizontale vlak zijn nedergeslagen. Wordt nu het projecterend vlak weder opgeslagen, en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt, dan is het klaar, dat H' en h' de horizontale, en dus H'' en h'' de verticale projectiën van de begeerde snijpunten zullen wezen.

§ 178. Wanneer bij deze constructie de lijn EF den cirkel, uit G beschreven, aanraakt, dan zal daaruit blijken, dat ook de gegevene lijn den bol aanraakt; en als de lijn EF dien cirkel noch raakt noch snijdt, dan zal ook de gegevene lijn den bol niet raken of snijden.

Rigt men de constructie volgens de eerste leerwijze der vorige § in, en wordt de loodlijn, die men uit het middelpunt des bols op de gegevene lijn nederlaat, kleiner dan de straal des bols, dan zal dit aantoonen, dat de gegevene lijn den bol snijdt; wordt deze loodlijn gelijk aan den straal des bols, dan zal de gegevene lijn den bol in het voetpunt dezer loodlijn aanraken, en wordt deze loodlijn grooter dan die straal, dan zal de gegevene lijn den bol niet raken of snijden.

§ 179. Het is klaar, dat men de constructie van fig. 83 ook op het verticale vlak van projectie zou hebben kunnen uitvoeren, door de gegevene lijn om derzelver verticale projectie op het verticale vlak neder te slaan, en alsdan in het nedergeslagen projecterend vlak der lijn, den cirkel te bepalen, volgens welken dit projecterend vlak den bol snijdt. Hierdoor zou men eerst de verticale, en vervolgens de horizontale projectiën van de begeerde snijpunten gevonden hebben.

§ 180. De eerste leerwijze, in § 177 opgegeven, geeft een gemakkelijk middel aan de hand, om het werkstuk van § 175 op te lossen. Is namelijk de horizontale projectie van eenig punt in het oppervlak eens bols gegeven, en moet men de verticale projectie van dit punt bepalen, dan zal men slechts de verticale projectiën van de punten behoeven te construeren, waarin de loodlijn, die uit de gegevene horizontale projectie op het horizontale vlak wordt opgerigt, den bol snijdt.

Is, b. v., P' (fig. 84) de horizontale projectie van eenig punt in het oppervlak eens bols, waarvan men de verticale projectie wil bepalen, dan is P' de horizontale, en P'Q'' de verticale projectie van de loodlijn, die uit P' op het horizontale vlak wordt opgerigt, en de snijpunten van deze loodlijn met het oppervlak des bols moeten de punten wezen, waarvan P' de horizontale projectie is; de verticale projectiën dezer punten zullen dus de gevraagde zijn. Om deze snijpunten te bepalen, laat men, volgens de eerste leerwijze van § 177, uit het middelpunt (M', M'') eene loodlijn (M'P', M''R'') op deze snijlijn vallen; daar nu deze loodlijn,

omdat de snijlijn loodregt is op het horizontale vlak, evenwijdig aan hetzelve moet loopen, is (P′, R″) derzelver voet, en M′P′ derzelver werkelijke lengte. De regthoekszijde van den regthoekigen driehoek, waarvan de straal des bols de hypothenusa, en deze werkelijke lengte de andere regthoekszijde is, zal dus kunnen geconstruëerd worden, door uit P′ op P′M′ eene loodlijn P′P op te rigten, welke dan de afstand is, waarop de begeerde snijpunten zich van het punt (P′, R″) moeten bevinden. Daar nu deze afstanden, van het punt (P′, R″) af, moeten worden uitgezet op de snijlijn des bols, en deze in dit geval evenwijdig is aan het verticale vlak, zullen deze afstanden zich in derzelver ware grootten op het verticale vlak projecteren. Maakt men dus R″P″ = P′P, dan zullen P″ de verticale projectiën der snijpunten, en dus de verticale projectiën wezen van de punten in het oppervlak des bols, waarvan P′ de horizontale projectie is.

Op eene dergelijke wijze, zal men ook de horizontale projectie kunnen bepalen, wanneer een punt in het verticale vlak als de verticale projectie van eenig punt in het oppervlak des bols wordt aangenomen.

§ 181. Werkstuk. *De doorsnede van een plat vlak met een' bol te construeren.*

Dewijl de doorsnede van een plat vlak met een' bol, een cirkel is, zoo zal het er slechts op aankomen, het middelpunt en den straal van dezen doorsnijdingscirkel te bepalen. Laat men nu uit het middelpunt van den bol eene loodlijn neder op het gegeven vlak, dan zal de voet dezer loodlijn het middelpunt wezen van den cirkel, volgens welken het vlak den bol snijdt. Construeert men vervolgens eenen regthoekigen driehoek, waarvan de werkelijke lengte dezer loodlijn eene der regthoekszijden, en de straal des bols de hypothenusa is, dan zal de andere regthoekszijde de straal van den doorsnijdingscirkel zijn. Slaat men nu het gegeven vlak om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak, en beschrijft men uit het punt, waar het gevonden middelpunt alsdan komt te vallen, met den gevondenen straal eenen cirkel, dan zal daardoor de grootte van de gevraagde doorsnede, in derzelver betrekkelijke ligging ten opzigte van den horizontalen doorgang des gegeven vlaks, geheel en al bepaald wezen.

Is, b. v., B′*B*B″ (fig. 85) het gegeven vlak en (M′, M″) het middelpunt van den gegevenen bol, dan is (§ 98) MV de werkelijke lengte der loodlijn, die uit het middelpunt des bols op het gegeven vlak valt, terwijl V de voet dezer loodlijn, en dus het middelpunt van den gevraagden cirkel is. Beschrijft men nu den regthoekigen driehoek MRV, waarin de hypothenusa MR gelijk aan den straal des bols, en de eene regthoekszijde gelijk aan de loodlijn MV is, dan zal de andere regthoekszijde VR de straal van de gevraagde doorsnede wezen. Bij het nederslaan van het gegeven vlak om deszelfs horizontalen doorgang *BB*′ op het horizontale vlak, komt (§ 92) het middelpunt V, waarvan V′ en V″ de beide projectiën zijn, in v′ te vallen; beschrijft men dus uit v′, met v′r′ = VR als straal, eenen cirkel, dan zal deze de gevraagde doorsnede voorstellen, en wel in derzelver betrekkelijke ligging, ten opzigte van den horizontalen doorgang des gegevenen vlaks.

Volgens § 161 zal men verder de beide projectiën van de gevondene doorsnede kunnen bepalen, wanneer het snijdende vlak B′*B*B″ weder

opgeslagen, en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt wordt, en volgens § 162 zal men de beide assen kunnen construeren van de ellipsen, volgens welke deze cirkel zich alsdan zal projecteren.

§ 182. Uit de opgegevene constructie, in de vorige §, zal ook terstond blijken, of het gegeven vlak den bol al of niet snijdt. Wordt namelijk de loodlijn, die men uit het middelpunt des bols op het gegeven vlak nederlaat, kleiner dan de straal des bols, dan toont dit aan, dat het gegeven vlak den bol snijdt; wordt deze loodlijn gelijk aan den straal des bols, dan zal het vlak den bol in den voet der loodlijn aanraken; en wordt deze loodlijn grooter dan de straal des bols, dan zal het vlak den bol noch raken noch snijden.

§ 183. Werkstuk. *Den bol te bepalen, die door vier gegevene punten gaat.* Wanneer men door het midden van eene koorde eens bols, een vlak laat gaan, loodregt op die koorde, dan zal dit vlak door het middelpunt des bols gaan; want daar in dit vlak al de loodlijnen liggen, die uit het midden dezer koorde op dezelve kunnen worden opgerigt, zoo bevat hetzelve al de punten in de ruimte, die op gelijken afstand van de uiteinden dezer koorde staan, en het moet dus door het middelpunt des bols gaan, dat ook op gelijken afstand van deze uiteinden gelegen is.

Zijn nu vier punten in de ruimte gegeven, waardoor men het oppervlak eens bols wil laten gaan, dan zal men, door een dezer punten met de drie overige te vereenigen, drie koorden des gevraagden bols verkrijgen; deelt men elk dezer koorden midden door (§ 67), en brengt men door het midden van elke koorde een vlak loodregt op dezelve (§ 109), dan zal, volgens het boven bewezene, elk dezer vlakken het middelpunt van den bol bevatten; zoekt men dus (§ 80) het snijpunt dezer drie vlakken, dan zal dit het begeerde middelpunt wezen. Verder zal men den straal des bols kunnen bepalen, door (§ 57) den afstand te construeren tusschen het gevonden middelpunt en een der gegevene punten. Beschrijft men dus eindelijk, uit elk der projectiën van het middelpunt, met den gevondenen straal eenen cirkel, dan zullen deze cirkels de projectiën van den bol zijn, en binnen elk dezer projectiën moeten nu (§ 174) de gelijknamige projectiën der gegevene punten gelegen wezen.

Het zal onnoodig wezen, deze algemeene oplossing door eene figuur op te helderen, dewijl alles tot vorige werkstukken is teruggebragt.

§ 184. Zijn drie der vier punten in het horizontale vlak gegeven, dan wordt in dit bijzonder geval de oplossing zeer eenvoudig.

Laat a′, b′, c′ (fig. 86) de drie punten zijn, gelegen in het horizontale vlak, en (d′, D″) het vierde punt, dan kan men een nieuw verticaal vlak aannemen, dat door een der drie punten, b. v. door a′ en door het vierde punt (d′, D″) gaat; hiertoe trekke men a′d′, welke nu de nieuwe as van projectie zal wezen, en neme loodregt op dezelve, $d'd'' = dD''$. Trekt men nu de lijn a′d″, dan zal deze lijn, die in het verticale vlak ligt, eene koorde van den gevraagden bol wezen. De cirkel, die door a′, b′ en c′ gaat, is klaarblijkelijk een kleine cirkel van den gevraagden bol, en de loodlijn (m′, mq″), die uit het middelpunt m′ van dezen cirkel op deszelfs vlak, dat is op het horizontale vlak, wordt opgerigt, gaat derhalve door het middelpunt van den bol. Daar

nu dit middelpunt ook moet gelegen wezen in het vlak $p''pp'$, dat door het midden p'' van de koorde $a'd''$ loodregt op dezelve gebragt wordt, zoo zal het punt (m', m''), waar de loodlijn (m', mq'') het vlak $p''pp'$ snijdt, het begeerde middelpunt aanwijzen. De straal wordt nu gevonden, door den afstand mc', van het middenpunt (m', m'') tot een der gegevene punten c' te construeren. Worden dus eindelijk uit m' en m'', met $m\,c'$ als straal, cirkels beschreven, dan zullen deze cirkels de projectiën van den gevraagden bol wezen.

§ 185. Het algemeene geval, dat in § 183 behandeld is, kan door toepassing van voorgaande werkstukken, altijd tot het bijzondere geval van de voorgaande § worden teruggebragt. Men kan namelijk (§ 114) door drie der vier gegevene punten een vlak laten gaan, en dit vlak als een nieuw horizontaal vlak van projectie aannemen, waarop men (§ 101) het vierde punt projecteert; heeft men nu bepaald, waar deze drie punten, benevens de projectie van het vierde punt, komen te vallen, wanneer dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang is nedergeslagen, dan kan men het nieuwe verticale vlak van projectie door het vierde punt en door een der drie overige laten gaan, en na deze voorbereidende constructie, zal men die van de voorgaande § kunnen toepassen.

§ 186. Ten opzigte van dit werkstuk valt nog op te merken, dat, zal er een bepaalde bol aan voldoen, de vier gegevene punten niet in een zelfde vlak moeten gelegen wezen. Liggen de vier gegevene punten in hetzelfde vlak, en niet in den omtrek van eenen zelfden cirkel, dan is het werkstuk onmogelijk; liggen zij echter in een zelfde vlak, en kan er om den vierhoek, die hen vereenigt, een cirkel beschreven worden, dan zal er een oneindig aantal bollen bestaan, die aan de vraag voldoen, en het werkstuk is dus onbepaald.

§ 187. Door de oplossing van dit werkstuk heeft men nu ook geleerd, een punt te bepalen, dat op gelijke afstanden van vier gegevene punten staat; en daar men de vier gegevene punten als de hoekpunten van eene driehoekige piramide kan aanmerken, heeft men ook het werkstuk leeren oplossen, om den bol te bepalen, die om eene gegevene driehoekige piramide kan worden beschreven.

§ 188. Werkstuk. *Een vlak te construeren, dat eenen gegevenen bol in een gegeven punt aanraakt.*

Vereenigt men het gegeven punt met het middelpunt des bols, dan verkrijgt men den straal, die door dit punt gaat; brengt men nu door het gegeven punt een vlak loodregt op dien straal, dan zal dit het begeerde wezen.

Is, b. v., (M', M'') (fig. 87) het middelpunt eens bols, en P' de horizontale projectie van eenig punt in deszelfs oppervlak, dan is (§ 176) P'' de verticale projectie van dit punt, en dus $(P'M', P''M'')$ de straal des bols, die door het punt (P', P'') gaat. Construeert men nu (§ 109) een vlak $B'EB''$, dat door het punt (P', P'') gaat, en loodregt staat op den straal $(P'M', P''M'')$, dan zal dit vlak het begeerde rakende vlak wezen.

§ 189. Men kan ook, om het rakende vlak te bepalen, een der projecterende vlakken van den straal, die door het gegeven punt gaat, als een nieuw projectievlak aannemen.

Is, b. v., (P′, P″) (fig. 82) het gegeven punt, dan is MM′P′ het projecterend vlak van den straal, die door dit punt gaat, wanneer dit projecterend vlak om deszelfs horizontalen doorgang M′P′ op het horizontale vlak is nedergeslagen. Neemt men nu dit vlak MM′P′ als een nieuw verticaal vlak van projectie, en dus M′P′ als eene nieuwe as aan, dan is MP de nieuwe verticale projectie, en M′P′ de horizontale projectie van den straal, die nu in het nieuwe verticale vlak gelegen is. Om dus het vlak te construeren, dat loodregt op dien straal door het gegeven punt gaat, behoeft men slechts uit P eene loodlijn op PM te trekken, dan zal dit de verticale doorgang wezen; en trekt men uit het punt, waar deze verticale doorgang de as P′M′ snijdt, eene loodlijn op dezelve, dan zal men den horizontalen doorgang van het begeerde vlak verkrijgen. De verticale doorgang op het oorspronkelijke verticale vlak van projectie kan nu ook gemakkelijk bepaald worden.

§ 190. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat eenen gegevenen bol aanraakt.*

In § 178 is geleerd, hoe men kan onderzoeken, of eene lijn eenen bol snijdt, raakt, of buiten denzelven valt; snijdt nu de gegevene lijn den bol, dan is de oplossing onmogelijk; raakt zij den bol, dan zal er slechts één rakend vlak bestaan, dat volgens § 188 kan geconstrueerd worden; ligt de lijn echter geheel en al buiten den bol, dan zullen er ook twee rakende vlakken bestaan, die aan de vraag beantwoorden.

Om nu tot de oplossing van het werkstuk te geraken, verbeeldt men zich, dat er een vlak door de gegevene lijn gaat, dat den bol aanraakt, dan moet dit vlak loodregt staan op den straal, die door het raakpunt gaat; verbeeldt men zich verder een vlak, dat door den straal van het raakpunt loodregt op de gegevene lijn gebragt wordt, dan zal dit vlak niet alleen loodregt staan op het rakende vlak, maar ook loodregt wezen op het vlak, dat door de gegevene lijn en het middelpunt des bols gaat, en zijne doorsneden met deze beide vlakken, zullen dus derzelver standhoek vormen. Deze doorsneden, of de beide beenen van den standhoek, dien het rakende vlak moet maken met het vlak, gaande door de gegevene lijn en het middelpunt des bols, zullen klaarblijkelijk wezen: de loodlijn, die uit het middelpunt des bols op de gegevene lijn valt, en de raaklijn, die uit het voetpunt dezer loodlijn getrokken wordt aan den cirkel, volgens welken de bol gesneden wordt door het vlak, dat door het middelpunt des bols loodregt op de gegevene lijn gebragt wordt. Daar nu deze beide beenen van dien standhoek, met den straal van het raakpunt eenen regthoekigen driehoek vormen, zal het er slechts op aankomen, de lengte van de loodlijn te bepalen, die uit het middelpunt van den bol op de gegevene lijn valt; want dan zal men dien regthoekigen driehoek, en dus ook dien standhoek kunnen construeren. Het werkstuk zal alsdan teruggebragt zijn tot het construeren van een vlak, gaande door de gegevene lijn, en makende eenen gegevenen hoek met het vlak, dat door de gegevene lijn en het middelpunt des bols gaat; en daar er volgens § 126 twee vlakken bestaan, die hieraan beantwoorden, zoo zal men dan ook de twee rakende vlakken verkrijgen, waarvan hier boven gesproken is.

Is, b. v., (A′B′, A″B″) (fig. 88) de gegevene lijn en (M′, M″) het

middelpunt van den gegevenen bol, dan is (§ 110) (M'C', M''C'') de loodlijn, die uit het middelpunt op de gegevene lijn valt, en (§ 58) M'C de werkelijke lengte dezer loodlijn. Trekt men nu uit C de raaklijn CD aan de horizontale projectie van den bol, dan is M'CD een regthoekige driehoek, waarin de hypothenusa gelijk is aan de loodlijn M'C, en de eene regthoekszijde M'D de straal des bols is, zoodat M'CD de hoek zal wezen, dien het rakende vlak moet maken met het vlak, dat door het middelpunt en de gegevene lijn gaat. Construeert men dus (§ 117) het vlak E'*E*E'', gaande door het middelpunt (M', M'') en door de gegevene lijn (A'B', A''B''), en vervolgens (§ 125) de vlakken F'*I*F'' en G'*G*G'', gaande door de gegevene lijn (A'B', A''B''), en makende met het vlak E'*E*E'' den standhoek M'CD, dan zullen F'*I*F'' en G'*G*G'' de gevraagde rakende vlakken wezen.

§ 191. De rakende vlakken kunnen ook geconstrueerd worden, door de punten te bepalen, waar zij den bol moeten aanraken. Hiertoe brengt men (§ 109) door het middelpunt des bols een vlak, loodregt op de gegevene lijn, en bepaalt (§ 82) het punt, waar deze lijn dit vlak snijdt. Vervolgens slaat men dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak, en bepaalt (§ 92), waar het middelpunt des bols en het punt, waar de gegevene lijn dit vlak snijdt, alsdan komen te vallen. Trekt men nu uit dit laatste punt raaklijnen aan den cirkel, die uit het nedergeslagen middelpunt, met den straal des bols, in het horizontale vlak beschreven is, dan zullen de raakpunten aan dezen cirkel de begeerde wezen; welke raakpunten echter met het vlak, dat door het middelpunt des bols loodregt op de gegevene lijn gebragt is, op het horizontale vlak liggen nedergeslagen. Bepaalt men dus (§ 95), waar de projectiën dezer raakpunten komen te vallen, wanneer dit vlak weder opgeslagen, en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt wordt, dan zal men, door elk dezer punten en de gegevene lijn (§ 117) vlakken brengende, de gevraagde rakende vlakken bekomen.

Men kan ook, na de raakpunten bepaald te hebben, door elk dezer punten (§ 188) een rakend vlak aan den gegevenen bol brengen; want dan zullen beide deze vlakken door de gegevene lijn moeten gaan, en dus mede de begeerde wezen.

§ 192. De punten, waar de gevraagde vlakken den bol moeten aanraken, kunnen ook nog op eene andere wijze bepaald worden.

Neemt men namelijk een willekeurig punt in de gegevene lijn aan, en verbeeldt men zich, dat eene lijn, door dit punt gaande, zich zoodanig beweegt, dat zij altijd op den bol blijft rusten, dan zal deze lijn de beschrijvende lijn wezen van een kegelvlak (*), dat den bol volgens eenen kleinen cirkel aanraakt. Neemt men verder een tweede punt aan in de gegevene lijn, en verbeeldt men zich weder, dat eene lijn, door dit tweede punt gaande, insgelijks een kegelvlak doorloopt, dat den bol

(*) Een *kegelvlak* ontstaat in het algemeen, door de beweging van eene regte lijn, die altijd door een gegeven punt gaat, en op eene gegevene kromme lijn blijft rusten. De regte lijn wordt alsdan *de beschrijvende lijn*, de kromme lijn *de rigtlijn*, en het punt *de top* van het kegelvlak genoemd.

aanraakt, dan zullen deze twee lijnen tweemaal in zulk een' stand komen, dat zij elkander op het oppervlak des bols snijden; en daar zij beide altijd loodregt staan op den straal des bols, zullen zij in elk dezer snijpunten loodregt staan op denzelfden straal, en dus twee vlakken bepalen, die den bol aanraken, en tevens door de gegevene lijn gaan. Wanneer men nu deze twee snijpunten door eene regte lijn vereenigd denkt, verkrijgt men eene koorde des bols, die de gemeene doorsnede is van de grondvlakken der beide kegelvlakken, of van de kleine cirkels, volgens welke die kegelvlakken den bol aanraken. Het komt er dus slechts op aan, om deze gemeene doorsnede te bepalen; want deze bepaald zijnde, zullen de punten, waarin zij den bol snijdt, de begeerde raakpunten wezen.

Hiertoe brengt men door het middelpunt des bols een vlak, evenwijdig aan het verticale vlak, en bepaalt het punt, waar de gegevene lijn dit vlak snijdt. Neemt men nu dit snijpunt als den top van het eene kegelvlak aan, dan zal het evenwijdige vlak dit kegelvlak snijden volgens twee beschrijvende lijnen, die evenwijdig zijn aan het verticale vlak, en de cirkel, volgens welken dit kegelvlak den bol aanraakt, zal loodregt staan op het verticale vlak; men zal dus de verticale projectie van dezen cirkel verkrijgen, alsmede van alle lijnen, die in deszelfs vlak gelegen zijn, door uit de verticale projectie van den top raaklijnen aan de verticale projectie van den bol te trekken, en de raakpunten te vereenigen.

Brengt men verder door het middelpunt des bols een vlak, evenwijdig aan het horizontale vlak, en neemt men het punt, waar de gegevene lijn dit vlak snijdt, als den top van het tweede kegelvlak aan, dan zal het evenwijdige vlak dit kegelvlak snijden volgens twee beschrijvende lijnen, die evenwijdig zijn aan het horizontale vlak, en de cirkel, volgens welken dit kegelvlak den bol aanraakt, zal loodregt staan op het horizontale vlak; men zal dus de horizontale projectie van dezen cirkel verkrijgen, alsmede van alle lijnen, die in deszelfs vlak gelegen zijn, door uit de horizontale projectie van dezen tweeden top raaklijnen aan de horizontale projectie van den bol te trekken, en de raakpunten te vereenigen.

Daar nu de grondvlakken van beide kegelvlakken loodregt staan op de projectievlakken, zijn deze grondvlakken niet anders dan de projecterende vlakken van derzelver gemeene doorsnede: de verticale projectie van den eersten cirkel is dus de verticale projectie, en de horizontale projectie van den tweeden cirkel is de horizontale projectie van deze gemeene doorsnede, of van de koorde des bols, waarin de gezochte raakpunten gelegen zijn. Construeert men dus eindelijk (§ 177) de punten, waarin deze koorde den bol snijdt, dan zullen de raakpunten en dus ook de rakende vlakken bepaald wezen.

§ 193. Zijn de gegevene lijn en het middelpunt des bols in het horizontale vlak gelegen, dan wordt in dit bijzondere geval de constructie zeer eenvoudig.

Laat b.v. (M′, *M*) (fig. 89) het middelpunt des bols, en A′*C* de gegevene lijn wezen. Neemt men nu het vlak, dat door het middelpunt des bols loodregt op de gegevene lijn gebragt wordt, als een nieuw

verticaal vlak van projectie aan, dan zal M'B', die loodregt staat op A'C, de nieuwe as van projectie zijn, terwijl de cirkel M' de horizontale en verticale projectie van den bol zal wezen; en nu is het klaar, dat als men de raaklijnen B'R en B'r trekt, de vlakken RB'A' en rB'C de begeerde rakende vlakken zullen wezen.

§ 194. Het algemeene geval kan altijd tot het bijzondere geval van de vorige § worden teruggebragt, door vooreerst (§ 117) een vlak te construeren, dat door het middelpunt van den bol en door de gegevene lijn gaat, vervolgens te bepalen (§ 92), waar het middelpunt en de gegevene lijn komen te vallen, wanneer dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang wordt nedergeslagen op het horizontale vlak, en eindelijk dit nedergeslagen vlak als het nieuwe horizontale vlak aan te nemen.

§ 195. Werkstuk. *De doorsnede van twee gegevene bollen te construeren.*

Het is klaar, dat de gevraagde doorsnede een cirkel is, en men zal dus den straal en het middelpunt van dezen cirkel moeten bepalen, benevens het vlak, waarin dezelve gelegen is.

Verbeeldt men zich daartoe een vlak, dat door de beide middelpunten gaat, dan snijdt dit vlak de bollen volgens groote cirkels; vereenigt men nu het snijpunt van de omtrekken dezer cirkels met de beide middelpunten, en deze laatste met elkander, dan ontstaat er een driehoek, waarin de afstand der beide middelpunten de basis, en de stralen der bollen de opstaande zijden zijn: de hoogte van dezen driehoek zal de straal wezen van den cirkel, volgens welken de beide bollen elkander snijden. Wentelt namelijk het vlak, dat door de middelpunten gebragt is, om de lijn, die dezelve vereenigt, dan zullen de groote cirkels, die in dit vlak gelegen zijn, de oppervlakken der bollen beschrijven, terwijl het punt, waarin derzelver omtrekken elkander snijden, den omtrek eens cirkels zal doorloopen, die, tot beide oppervlakken behoorende, de gemeene doorsnede der bollen is, en waarvan het vlak loodregt staat op de lijn, die door derzelver middelpunten gaat.

Zijn nu, b. v., (M', M'') en (N', N'') (fig. 90) de middelpunten der gegevene bollen, waarvan men de doorsnede wil bepalen, dan is (§ 57) MN de afstand dezer middelpunten; beschrijft men dus uit M en N, met stralen MO en NO, gelijk aan die der bollen, cirkelbogen, die elkander in O snijden, dan zal de loodlijn OP de straal, en P het middelpunt wezen van den cirkel, volgens welken de bollen elkander snijden; en daar dit middelpunt P gelegen is in de lijn (M'N', M''N''), zal men deszelfs beide projectiën P' en P'' verkrijgen, door uit P eene loodlijn op M'N', en uit P' eene loodlijn door de as van projectie te trekken. Het vlak, waarin deze cirkel gelegen is, moet door het punt (P', P'') gaan, en loodregt staan op de lijn (M'N', M''N''); hetzelve kan dus volgens § 109 geconstrueerd worden. Merkt men echter op, dat het punt R', waar het verlengde van de loodlijn OP de horizontale projectie M'N' snijdt, een punt moet wezen van den horizontalen doorgang dezes vlaks, dan behoeft men, om deszelfs beide doorgangen te construeren, alleen uit R' eene loodlijn op M'N', en uit *R* eene loodlijn op M''N'' te trekken. Het vlak R'*R*R'' zal dus het vlak wezen, waarin de cirkel gelegen is, volgens welken de beide bollen elkander snijden. Slaat men dit vlak (§ 92), om deszelfs horizontalen doorgang *R*R', ophet horizontale

vlak neder, dan zal het middelpunt (P′, P″) van den doorsnijdingscirkel in p′ komen te vallen. Beschrijft men dus uit p′, met OP als straal, eenen cirkel, dan is hierdoor de gevraagde doorsnede, zoowel in grootte, als in betrekkelijke ligging tot de lijn RR′, geheel bepaald. Men zal echter, volgens § 162, ook de ellipsen kunnen bepalen, volgens welke deze doorsnijdingscirkel zich op beide vlakken projecteert.

§ 196. De lijnen MO en NO stellen in fig. 90 de stralen der beide bollen voor; gebeurt het nu, dat MO + NO = MN wordt, dan toont dit aan, dat de gegevene bollen elkander uitwendig aanraken; wordt MO — NO = MN, of MN + NO = MO, dan blijkt hieruit, dat de gegevene bollen elkander inwendig aanraken; en wordt eindelijk MO + NO < MN, dan zal dit aantoonen, dat de gegevene bollen geheel en al buiten elkander vallen, en dus elkander noch raken, noch snijden.

§ 197. Heeft het bijzondere geval plaats, dat de beide middelpunten der bollen in het horizontale vlak gelegen zijn, dan wordt het middelpunt en de straal van den doorsnijdingscirkel, benevens het vlak, waarin dezelve gelegen is, zoo gemakkelijk bepaald, dat het onnoodig is, hieromtrent eene verklaring te geven. Voor het overige kan het algemeene geval altijd tot dit bijzondere geval herleid worden, door een vlak, loodregt op het verticale vlak, door de beide middelpunten te brengen, dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang op het horizontale vlak neder te slaan, en te bepalen, waar de beide middelpunten alsdan komen te vallen.

§ 198. Werkstuk. *De doorsnede van drie gegevene bollen te construeren.*

Heeft men volgens § 195 het vlak geconstrueerd, waarin de doorsnede van twee dezer bollen gelegen is, en vervolgens het vlak, waarin de doorsnede ligt van een' dezer bollen met den derden, dan zal men (§ 73) de lijn kunnen bepalen, volgens welke deze twee vlakken elkander snijden. Deze lijn moet nu klaarblijkelijk door elk der drie gegevene bollen gaan, en men zal dus slechts (§ 177) de punten behoeven te bepalen, waar deze lijn een' der gegevene bollen doorsnijdt, welke alsdan de begeerde snijpunten zullen wezen.

Het zal onnoodig zijn, omtrent deze algemeene oplossing in verdere bijzonderheden te treden, dewijl alles tot de oplossing van vorige werkstukken is teruggebragt.

§ 199. Liggen de middelpunten der gegevene bollen in het horizontale vlak, dan wordt de oplossing zeer eenvoudig.

Zijn, b. v., (m, *m*), (n, *n*) en (p, *p*) (fig. 91) de middelpunten der drie gegevene bollen, dan is a h de straal van den cirkel, volgens welken de bollen, die m en n tot middelpunten hebben, elkander snijden; het vlak van dezen cirkel, als loodregt op m n zijnde, staat loodregt op het horizontale vlak, en heeft a b tot horizontalen doorgang. Even zoo is c k de straal van den cirkel, volgens welken de bollen, die n en p tot middelpunten hebben, elkander snijden, en het vlak van dezen cirkel, als loodregt op n p zijnde, staat insgelijks loodregt op het horizontale vlak, en heeft c d tot horizontalen doorgang. Het punt e′, waarin de doorgangen a b en c d van deze twee loodregte vlakken elkander snijden, is een punt van derzelver gemeene doorsnede, en daar deze doorsnede ook loodregt staat op het horizontale vlak, zoo is e′ de horizontale pro-

jectie van alle punten dezer doorsnede, en dus ook van de punten, waarin deze lijn een' der bollen snijdt, dat is, van de snijpunten der drie bollen.

De horizontale projectie e′ van de snijpunten der bollen gevonden zijnde, slaat men, om derzelver afstand tot het horizontale vlak te bepalen, een' der cirkels, waarin deze punten moeten gelegen wezen, om deszelfs middellijn neder op het horizontale vlak. Beschrijft men, b. v., uit k met c k als straal, eenen halven cirkel, en trekt men e e′ loodregt op c d, dan zal e een der snijpunten, en dus e e′ de hoogte van dit snijpunt boven het horizontale vlak wezen. Het is klaar, dat het andere snijpunt even ver beneden het horizontale vlak gelegen is, waarvan men zich kan overtuigen, door den halven cirkel, uit k beschreven, te voltooijen. Men zal dus de verticale projectie der snijpunten verkrijgen, door uit e′ eene loodlijn e′ e op de as q r te trekken, en e e″ = e e′ te maken.

§ 200. Elk der geconstrueerde snijpunten (e′, e″), als in het oppervlak van elk der bollen liggende, staat van de middelpunten m, n en p op afstanden, die gelijk zijn aan de stralen dier bollen. Men heeft dus ook het werkstuk leeren oplossen, om een punt te bepalen, dat van drie gegevene punten op gegevene afstanden staat.

§ 201. Als men de driehoeken a m n, s m p en c p n om de zijden m n, m p en p n laat omwentelen, dan zullen de punten a, s en c in één punt zamenkomen, en wel in het punt (e′, e″), waar de bollen elkander snijden. Hierdoor zal eene driehoekige piramide ontstaan, waarvan m p n het grondvlak zal zijn, en waarvan de opstaande ribben de stralen van de gegevene bollen zullen wezen. De hoogte van deze piramide zal de lijn ee′ zijn, en daar men tevens al de zijvlakken van de drievlakkige hoeken dezer piramide kent, zoo blijkt hieruit, dat men door deze constructie ook het werkstuk heeft leeren oplossen, om de hoogte, de standhoeken, enz. van eene driehoekige paramide te construeren, wanneer de zes ribben van dezelve gegeven zijn.

§ 202. Het algemeene geval, dat in § 198 is behandeld, kan altijd tot het bijzondere geval van § 199 teruggebragt worden, door vooreerst (§ 114) een vlak te construeren, dat door de drie gegevene middelpunten gaat, vervolgens te bepalen (§ 92), waar deze middelpunten komen te vallen, wanneer dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang op het horizontale vlak wordt nedergeslagen, en eindelijk dit nedergeslagen vlak als het nieuwe horizontale vlak van projectie aan te nemen.

§ 203. Werkstuk. *Door een gegeven punt een vlak te construeren, dat twee gegevene bollen aanraakt.*

Laat (M′, M″) (fig. 92) het middelpunt van den eenen bol, (N′, N″) dat van den anderen, en (A′, A″) het gegeven punt zijn. Verbeeldt men zich nu een kegelvlak, dat om de beide bollen beschreven is, en hen dus beide aanraakt, dan zal de top van dit kegelvlak gelegen zijn in de lijn (M′ N′, M″N″), die door de beide middelpunten gaat; het punt B′, waar de gemeene raaklijnen aan de horizontale projectiën der bollen (*) de lijn M′N′ snijden, zal de horizontale projectie van dezen

(*) Om eene raaklijn aan twee gegevene cirkels te trekken, beschrijft men op de lijn MN (fig. 92), die hunne middelpunten vereenigt, eenen halven cirkel, en uit het middel-

top, en dus B″ deszelfs verticale projectie wezen. Vereenigt men nu den top dezes kegelvlaks met het gegeven punt, en verbeeldt men zich door deze lijn (A′B′, A″B″) twee rakende vlakken aan het kegelvlak, dan zal elk dezer rakende vlakken het kegelvlak volgens eene van deszelfs beschrijvende lijnen aanraken, en gevolgelijk zullen zij beide te gelijker tijd ook de beide bollen aanraken. Het werkstuk is dus herleid tot het construeren van een vlak, dat door de lijn gaat, die den top des kegelvlaks met het gegeven punt vereenigt, en dat een' der gegevene bollen aanraakt. De beide rakende vlakken, die men alsdan volgens § 190 verkrijgt, zullen tevens den tweeden bol aanraken.

Hierbij valt nog op te merken, dat men zich twee kegelvlakken kan verbeelden, die om dezelfde twee bollen beschreven zijn. Het eerste omvat hen beide van binnen, en heeft deszelfs top in het verlengde der lijn, die de beide middelpunten vereenigt: de rakende vlakken aan dit kegelvlak raken de beide bollen aan denzelfden kant. Het tweede kegelvlak omvat den eenen bol van binnen, den anderen van buiten, en heeft deszelfs top tusschen de beide middelpunten. Trekt men nu aan de horizontale projectiën der beide bollen, de twee inwendige raaklijnen, dan zal het punt C′, waar deze lijnen elkander en de lijn M′N′ snijden, de horizontale projectie wezen van den top dezes kegelvlaks, en deszelfs verticale projectie C″ wordt verkregen, door uit C′ eene loodlijn op de as te trekken, tot aan de lijn M″N″. De twee rakende vlakken, die door de lijn (A′C′, A″C″) aan dit kegelvak kunnen gebragt worden, raken ook elk der beide bollen; maar zij raken den eersten aan den eenen, en den tweeden aan den anderen kant. Worden dus door de lijn (A′B′, A″B″), zoowel als door de lijn (A′C′, A″C″), rakende vlakken aan een' der bollen gebragt, dan zullen deze vlakken ook den anderen bol aanraken; en als geen dezer beide lijnen een' der beide bollen snijdt, zal men vier

---

punt M van den grootsten cirkel eenen cirkelboog, met eenen straal MP, die gelijk is aan het verschil der stralen van de twee gegevene cirkels; vervolgens trekt men door het punt P, waarin deze cirkelboog den halven cirkel snijdt, den straal MPR, en eindelijk NS, evenwijdig aan MR, dan zijn R en S de raakpunten, en bijgevolg RS de gevraagde raaklijn. Om dit te bewijzen, merke men op, dat hoek MPN, als in eenen halven cirkel staande, regt is, en dat, MP = MR − NS zijnde, NS = MR − MP = PR is. Daar nu deze lijnen NS en PR beide loodregt staan op PN, zoo is RPNS een regthoek; RS staat derhalve loodregt op de stralen MR en NS, en is dus eene raaklijn aan beide de cirkels. Door den halven cirkel, op MN beschreven, te voltooijen, en beneden MN de constructie te herhalen, zal men nog eene andere uitwendige raaklijn kunnen bepalen.

Beschrijft men uit M eenen cirkelboog met eenen straal MP′, die gelijk is aan de som der stralen van de twee gegevene cirkels; trekt men door het punt P′, waarin deze cirkelboog den halven cirkel, op MN beschreven, snijdt, den straal P′R′M, en vervolgens NS′ evenwijdig aan MR′, dan zal R′S′ eene der inwendige raaklijnen aan beide cirkels wezen. Men zal dit op dezelfde wijze als boven kunnen betogen, door op te merken, dat hoek MP′N, als in eenen halven cirkel staande, regt is, en dat MP′ = MR′ + NS′ zijnde, NS′ = MP′ − MR′ = P′R′ is. Het is klaar, dat men, op dezelfde wijze te werk gaande, nog eene andere inwendige raaklijn zal kunnen bepalen, en dat er dus vier gemeene raaklijnen aan deze cirkels kunnen bestaan.

Zijn de gegevene cirkels even groot, dan zal men de uitwendige raaklijnen verkrijgen, door uit de middelpunten, op de lijn, die dezelve vereenigt, loodlijnen te stellen, en de punten, waar deze de omtrekken snijden, met elkander te vereenigen. De inwendige raaklijnen zullen in dit geval de lijn, die de middelpunten vereenigt, midden door deelen.

Liggen twee cirkels geheel en al binnen elkander, dan bestaat er natuurlijk geen gemeene raaklijn aan dezelve; raken zij elkander inwendig, dan bestaat er één; snijden zij elkander, dan bestaan er twee; raken zij elkander uitwendig, dan bestaan er drie, en zoo zij geheel en al buiten elkander liggen, dan bestaan er vier gemeene raaklijnen aan dezelve.

rakende vlakken verkrijgen, die aan de vraag beantwoorden: bij twee derzelve liggen de beide bollen aan denzelfden kant; bij de twee andere liggen zij aan verschillenden kant van het rakende vlak.

§ 204. Werkstuk. *Een vlak te construeren, dat drie gegevene bollen aanraakt.*

Men onderstelle, dat er een vlak bestaat, dat te gelijker tijd de drie bollen aanraakt. Verbeeldt men zich nu een kegelvlak om de twee eerste bollen beschreven, en hen beide aanrakende, dan zal het rakende vlak dit kegelvlak volgens eene van deszelfs beschrijvende lijnen aanraken, en door den top des kegels gaan. Verbeeldt men zich verder een tweede kegelvlak, dat om den eersten en derden bol beschreven is, dan zal het rakende vlak weder dit kegelvlak volgens eene van deszelfs beschrijvende lijnen aanraken, en gevolgelijk door zijnen top gaan. Verbeeldt men zich eindelijk een derde kegelvlak, dat den tweeden en derden bol omvat en aanraakt, dan zal het rakende vlak ook dit kegelvlak volgens eene van deszelfs beschrijvende lijnen aanraken, en door zijnen top gaan. De toppen der drie kegelvlakken zijn alzoo in het rakende vlak gelegen; maar zij liggen ook in het vlak, dat door de drie middelpunten gaat, en dat de lijnen bevat, die de middelpunten der bollen vereenigen: deze toppen zullen derhalve te gelijker tijd in twee verschillende vlakken, en dus in eene regte lijn gelegen wezen. Hieruit volgt, dat als men (§ 203) de horizontale en verticale projectiën van twee dezer toppen geconstrueerd heeft, de lijn, die deze twee toppen vereenigt, in het rakende vlak moet gelegen wezen, en dat het werkstuk alsdan is teruggebragt tot het construeren van een vlak, dat door eene gegevene lijn gaat, en een' der drie bollen aanraakt. Heeft men nu (§ 190) dit vlak bepaald, dan zal hetzelve ook de beide andere bollen aanraken. Wil men het raakpunt vooraf bepalen, dan kan dit geschieden, door het snijpunt te construeren van de twee cirkels, die door twee der drie kegelvlakken, hebbende hunnen top in dezelfde regte lijn, op denzelfden bol beschreven worden.

§ 205. Hierbij moet weder worden opgemerkt, dat er altijd twee kegelvlakken bestaan, die twee dezer bollen omvatten en aanraken, hebbende het eerste zijnen top in het verlengde der lijn, die de middelpunten vereenigt, en het tweede zijnen top tusschen de beide middelpunten. Het is dus klaar, dat er in het geheel zes kegelvlakken zullen bestaan, die de gegevene bollen twee aan twee omvatten: drie dezer kegelvlakken zijn buiten om elke twee bollen beschreven, en de drie andere hebben hunnen top tusschen de bollen. De toppen dezer zes kegels zullen drie aan drie in vier regte lijnen gelegen wezen, door elk van welke men twee vlakken zal kunnen brengen, die de drie bollen te gelijker tijd aanraken, mits geen dezer lijnen een' der bollen snijdt. Er zullen dus in het algemeen acht verschillende vlakken kunnen bestaan, die aan de vraag beantwoorden: twee dezer vlakken zullen elk de drie bollen aan denzelfden kant aanraken, terwijl de zes andere zoodanig zullen gelegen wezen, dat zij twee der bollen aan den eenen, en den derden aan den anderen kant aanraken. Snijdt eene of meer der vier lijnen een' der bollen, dan zullen er zes, vier, twee of geen rakende vlakken bestaan. De drie bollen kunnen ook zoodanige stralen en zoodanigen stand ten opzigte

van elkander hebben, dat er een oneindig aantal rakende vlakken aan dezelve bestaat.

§ 206. Heeft het bijzondere geval plaats, dat de middelpunten der drie bollen in het horizontale vlak gelegen zijn, dan wordt de constructie zeer eenvoudig.

Zijn, b. v., M, N en P (fig. 94) de gegevene middelpunten, dan zijn, volgens het boven gezegde, AC, FE, DE en DF de vier lijnen, door elke van welke men, ter beantwoording der vraag, twee rakende vlakken aan eèn' der bollen moet brengen, en dit kan volgens § 193 geschieden. Elk dezer aldus geconstrueerde vlakken zal nu ook de beide andere bollen aanraken. Snijdt dus geen dezer vier lijnen een' der bollen, hetwelk in dit geval blijken zal, als geen dezer lijnen eene der horizontale projectiën van de bollen snijdt, dan zullen er acht vlakken bestaan, die aan de vraag voldoen.

§ 207. Het algemeene geval, dat in § 204 en § 205 behandeld is, kan altijd tot het bijzondere geval van de vorige § herleid worden, door vooreerst (§ 114) een vlak te construeren, dat door de drie gegevene middelpunten gaat, vervolgens te bepalen (§ 92), waar deze middelpunten komen te vallen, wanneer dit vlak om deszelfs horizontalen doorgang op het horizontale vlak wordt nedergeslagen, en eindelijk dit nedergeslagen vlak als het nieuwe horizontale vlak van projectie aan te nemen.

§ 208. Uit het opgemerkte in § 204 en § 205 kan men nog besluiten, dat de ontmoetingspunten der raaklijnen, welke twee aan twee getrokken kunnen worden aan drie cirkels (fig. 94), die in hetzelfde vlak liggen, in eene regte lijn zullen gelegen wezen; want verbeeldt men zich de drie bollen, waarvan deze cirkels de groote cirkels zijn, alsmede het vlak, dat hen alle drie aanraakt, dan zal dit vlak ook de drie kegelvlakken aanraken, die om de bollen, twee aan twee, beschreven zijn, en het zal door derzelver toppen A, B en C gaan; maar deze drie toppen liggen ook in het vlak, dat door de drie middelpunten gaat: zij zijn alzoo in twee verschillende vlakken, dat is in derzelver gemeene doorsnede, en dus in eene regte lijn gelegen.

Trekt men aan dezelfde cirkels, twee aan twee, de inwendige raaklijnen, dan zullen de drie nieuwe snijpunten D, E en F dezer lijnen, twee aan twee in eene regte lijn met een der drie eerste gelegen wezen.

De zes punten A, B, C, D, E en F zullen alzoo de snijpunten zijn van de vier regte lijnen ABC, FEA, DEB en DFC.

OVER DE PERSPECTIEF.

§ 209. De *Perspectief* is de kunst, om op een gegeven vlak, gegevene voorwerpen zoodanig voor te stellen, als zij zich wezenlijk uit een gegeven standpunt aan het oog zouden vertoonen. Om deze bepaling wel te verstaan, verbeelde men zich, dat al de lichtstralen, die van eenig voorwerp tot ons oog komen, een tusschen liggend doorschijnend vlak snijden, en in elk hunner doorsneden een' afdruk nalaten van de kleur en den eigen' tint der punten, waarvan zij uitgaan, dan zal het geheel dezer doorsneden op het vlak de volmaakte afbeelding van het voorwerp vormen; zulk eene afbeelding nu van een voorwerp te verkrijgen, is het doel, dat men zich in de perspectief voorstelt te bereiken. Hieruit blijkt dus, dat de perspectief in twee bijzondere deelen kan worden onderscheiden: het eerste is zuiver wiskunstig, en heeft ten doel de juiste bepaling van elk der voor te stellen punten op het vlak, en dus van de gedaante des voorwerps; het tweede houdt zich bezig met het onderzoek naar den tint van licht en schaduw, dien men aan elk deel der afbeelding moet geven, en dit berust geheel op natuurkundige gronden. Het laatste deel wordt *lucht-perspectief*, en het eerste *regtlijnige perspectief* genoemd. Het is de regtlijnige perspectief, meestal alleen onder den naam van perspectief bekend, die hier in het bijzonder zal worden behandeld.

§ 210. Dewijl het licht zich volgens regte lijnen voortplant, zal de verzameling van al de lichtstralen, die van eenig voorwerp tot ons oog komen, eene piramide uitmaken, waarvan ons oog de top is.

Volgens de bovengegevene bepaling, is het dus gemakkelijk in te zien, dat de regtlijnige perspectief alleen bestaat in het construeren van de doorsnede, welke een gegeven vlak maakt met eene piramide, waarvan de top en het grondvlak gegeven zijn. Het oog is de top; het grondvak kan beschouwd worden, als te bestaan uit het oppervlak der voorwerpen, die men zich voorstelt af te beelden, en het snijdende vlak is dat, waarop men teekent.

De leerwijzen der beschrijvende meetkunst nu, geven de middelen aan de hand, om dit vraagstuk in zijne grootste algemeenheid op te lossen; dat is, wanneer men zelfs wil onderstellen, dat het vlak, waarop men de perspectief moet teekenen, een gebogen oppervlak zij. Gewoonlijk echter neemt men voor dit vlak een plat vlak aan, en dit zal dus ook hier gedaan worden.

§ 211. Het vlak, dat men zich tusschen het oog en het voorwerp verbeeldt, en waarop men de afbeelding verrigt, wordt *het glas* of *tafereel* genoemd; de doorsnede van elken lichtstraal met het glas, noemt

rspectief van het punt, waaruit deze lichtstraal voortkomt, verzameling van al deze doorsneden, of het beeld van de .es voorwerps, de *perspectivische teekening* van hetzelve genoemd et geheel der constructiën, die er vereischt worden, om eene che teekening van eenig voorwerp te vervaardigen, noemt men *ectief brengen* van dat voorwerp.

Het is klaar, dat er ook eene perspectivische teekening van werp zal ontstaan, wanneer men onderstelt, dat al de lichtlengd worden, tot dat zij een vlak ontmoeten, hetwelk, ten ı het oog, achter het voorwerp geplaatst is; alsdan zal het ter zijn dan het voorwerp. Wordt het vlak achter het oog dan zullen de lichtstralen, door het oog verlengd zijnde, een beeld van het voorwerp op het glas afteekenen.

Om nu een punt van eenig voorwerp in perspectief te brende stand van het oog, de stand van het punt en die van vlak, dat men als glas aanneemt, ten opzigte van twee ıkken, gegeven zijn, en dan zal het er slechts op aankomen, ıalen, waar de gezigtstraal, of de lijn, die uit het gegeven het oog wordt getrokken, het glas snijdt.

en b. v. de perspectief vinden van het punt (P′, P″) (fig. 95) ; B′*B*B″, wanneer O′ en O″ de projectiën van het oog zijn, P′, O″P″) de gezigtstraal, en het punt (p′, p″), waar deze lijn t glas snijdt, de begeerde perspectief; daar echter dit punt s geteekend moet worden, kan men daartoe het vlak B′*B*B″ an deszelfs doorgangen op het overeenkomstige projectievlak . Slaat men, b. v., hetzelve om den horizontalen doorgang het horizontale vlak, dan zal (§ 92) deze perspectief in p vallen.

Staat het glas loodregt op de as van projectie, dan wordt de eenvoudiger.

., (P′, P″) (fig. 96) het gegeven punt, (O′, O″) de plaats van n B′*B*B″ het glas, dat nu loodregt door de as van projectie is weder (O′P′, O″P″) de gezigtstraal, en (p′, p″) de begeerde , die in p komt te vallen, wanneer het glas om den verticalen B″*B* op het verticale vlak wordt nedergeslagen.

De constructie wordt nog eenvoudiger, wanneer men, zoo als geschiedt, het glas-zelf als verticaal vlak van projectie aanınt dan zal de perspectief van eenig punt gevonden worden, palen, waar de gezigtstraal, uit dit punt voortkomende, het lak ontmoet.

v., GS (fig. 97) het glas en tevens het verticale vlak van is verder het oog (O′, O″) vóór, en het gegeven punt (P′, P″) glas geplaatst, dan zal (O′P′, O″P″) de gezigtstraal, en dus de begeerde perspectief zijn, die nu in het glas-zelf getee-

Er bestaat nog eene soort van perspectivische teekeningen, nen zeer veel gebruik maakt. Men onderstelt namelijk, dat p eenen oneindigen afstand van het voorwerp geplaatst is, dan de gezigtstralen evenwijdige lijnen worden, die een prisma

6.

vormen, waarvan het oppervlak des voorwerps het grondvlak is. Wanneer alzoo de rigting van deze lijnen gegeven is, wordt er tot het perspectieven der voornaamste punten van het voorwerp alleen gevorderd, om door deze punten, lijnen evenwijdig met de gegevene lijn te construeren, en de doorsnijding van deze lijnen met het glas te bepalen.

Is, b. v., (A'B', A''B'') (fig. 98) de gegevene rigting, en (P', P'') het gegeven punt, dan zal (§ 37) (P'Q', P''Q'') de gezigtstraal, en dus (§ 56) p de begeerde perspectief wezen.

§ 217. De perspectief van eene regte lijn, wanneer het glas een plat vlak is, zal in het algemeen ook eene regte lijn wezen; want zij is de doorsnede van het vlak, dat door het oog en de lijn gaat, met het glas; ligt echter het oog in het verlengde eener lijn, dan zal de perspectief dezer lijn een enkel punt zijn, en wel het punt, waar zij het glas snijdt.

Om dus de perspectief van eene gegevene regte lijn te vinden, behoeft men slechts twee punten van dezelve in perspectief te brengen, en deze perspectieven door eene regte lijn te vereenigen. Heeft de gegevene lijn eene bepaalde lengte, dan zal men de perspectieven van derzelver uiteinden moeten bepalen, en deze door eene regte lijn vereenigen.

§ 218. Om de perspectief te bepalen van een veelvlakkig ligchaam, waarvan de hoekpunten door derzelver projectiën gegeven zijn, brengt men al de hoekpunten in perspectief, en vereenigt de gevondene perspectivische punten op dezelfde wijze, als de overeenkomstige punten in de gegevene figuur vereenigd zijn.

De perspectief van een der zijvlakken des ligchaams zal dus bestaan uit de perspectieven van de zijden dezes vlaks; het is klaar, dat alleen die zijvlakken, welke evenwijdig loopen met het glas, gelijkvormig kunnen wezen aan derzelver perspectieven.

Meestal echter zijn de twee projectiën van het ligchaam, dat in perspectief moet gebragt worden, niet onmiddellijk gegeven, maar wel de vorm van dit ligchaam, benevens de stand, dien hetzelve ten opzigte van het glas heeft, en het komt er dan op aan, om uit deze gegevens de twee projectiën, die tot het perspectieven noodig zijn, te bepalen. Deze voorloopige bewerking kost in vele gevallen meer moeite, dan het in perspectief brengen zelf.

§ 219. Wanneer het ligchaam, dat men in perspectief moet brengen, ondoorschijnend is, zal het voorste gedeelte het andere aan het oog onttrekken. Het zigtbare gedeelte van eenig voorwerp wordt van het onzigtbare afgescheiden door eene of meer lijnen, die men te zamen den *schijnbaren omtrek* van hetzelve noemt. De perspectief van den schijnbaren omtrek eens voorwerps, is de omtrek van deszelfs beeld op het glas. Zijn de voorwerpen, die men wil afbeelden, door platte vlakken begrensd, dan is het niet moeijelijk, om voor eenen bepaalden stand van het oog, de zigtbare zijvlakken van de onzigtbare te onderscheiden, en gevolgelijk de ribben te bepalen, die gezamenlijk den schijnbaren omtrek uitmaken.

Ofschoon het in het algemeen onnoodig is, de punten, die tot het onzigtbare gedeelte eens voorwerps behooren, in perspectief te brengen, is men echter veelal gewoon, bij het vervaardigen van regtlijnige

erspectieven, elk voorwerp als doorschijnend te beschouwen, en dus owel de onzigtbare als de zigtbare lijnen in perspectief te brengen, ch de eerste alleen met gestippelde lijnen aan te teekenen.

§ 220. Uit het voorgaande is gebleken, dat men, strikt genomen, le bewerkingen der perspectief door middel van een der eenvoudigste erkstukken (§ 82) uit de beschrijvende meetkunst kan verrigten. Ofschoon n deze leerwijze de natuurlijkste en duidelijkste is, om de perspectief te rklaren, als uit derzelver bepaling eigenaardig voortvloeijende, wordt ij echter in het werkdadige niet gevolgd, omdat er andere leerwijzen estaan, die gemakkelijker en spoediger tot het doel geleiden.

De stelling, die in de volgende § zal worden voorgedragen, is van el belang; zij geeft door hare gevolgen aanleiding tot vele bekortingen, n is de grondslag van eene leerwijze, die bij het maken van perspecvische teekeningen algemeen gevolgd wordt.

§ 221. *Wanneer eene lijn, die eenen willekeurigen stand ten opzigte van t glas heeft, op hetzelve in perspectief wordt gebragt, zal deze perspectief er het punt gaan, waar eene lijn, die uit het oog evenwijdig aan de gegeene lijn getrokken wordt, het glas ontmoet.*

Is namelijk O (fig. 99) het oog, GS het glas, en PP′ de gegevene jn, dan zal O′, waar OO′, evenwijdig aan PP′, het glas ontmoet, m punt zijn van de perspectief der lijn PP′. Want het vlak, dat door et punt O en de lijn PP′ gaat, snijdt het glas volgens de perspectief ezer lijn; de lijn OO′, die evenwijdig met PP′ is, en door het punt O aat, ligt klaarblijkelijk in dit zelfde snijdende vlak, en het punt O′, aarin deze lijn het glas ontmoet, moet alzoo noodzakelijk gelegen zijn n de perspectief der lijn PP′.

§ 222. Het is klaar, dat het punt P′, waar de gegevene lijn PP′ het las ontmoet, mede een punt van derzelver perspectief is. Om dus eene jn in perspectief te brengen, behoeft men alleen de punten te vereenigen, waarin deze lijn, en eene andere, die uit het oog evenwijdig an dezelve loopt, het glas ontmoeten.

§ 223. De perspectieven van de lijnen RR′, SS′, enz., die evenwijdig an PP′ loopen, moeten, om dezelfde reden als in § 221, ook door het unt O′ gaan; want de lijn OO′, die evenwijdig aan eene dezer lijnen oopt, is tevens evenwijdig aan al de overige. Hieruit volgt dus, *dat e perspectieven van evenwijdige lijnen in de ruimte, door een zelfde punt van et glas gaan, en wel door het punt, waarin de lijn, die uit het oog evenwijdig met deze lijnen getrokken is, het glas ontmoet.* Zulk een punt wordt een *vergaarpunt* genoemd.

§ 224. Loopen al deze lijnen PP′, RR′, SS′, enz., tevens evenwijdig aan het glas, dan loopt ook de lijn OO′ evenwijdig aan het glas. Hieruit volgt, *dat evenwijdige lijnen, die tevens evenwijdig aan het glas loopen, in erspectief evenwijdig zullen blijven, en dat de perspectief van elke verticale ijn mede verticaal is.*

§ 225. Alvorens over te gaan tot nieuwe leerwijzen, om punten in erspectief te brengen, moet eerst gewag gemaakt worden van eenige enamingen, die hierbij worden aangenomen.

De doorsnede GL (fig. 100) van het glas g s, dat verticaal staat, net het horizontale vlak HV, waarop men bijna altijd onderstelt, dat

de voorwerpen geplaatst zijn, wordt de *grondlijn* genoemd. De vert cale projectie O″ van het oog, of de voet der loodlijn, die uit hetzel op het glas valt, noemt men het *oogpunt*. De lijn h n, die door h oogpunt evenwijdig aan de grondlijn getrokken is, en die de doo snede voorstelt van het glas met een vlak, dat door het oog evenwijd aan het horizontale vlak gebragt wordt, noemt men den *horizon*. I punten D en D′, gelegen in den horizon, en zoodanig genomen, d O″D = O″D′ = OO″ is, of gelijk aan den afstand, dien het oog va het glas heeft, worden *distantiepunten* genoemd. Het is klaar, dat de punten D′ en D de punten zijn, waarin horizontale lijnen, die u het oog getrokken worden, en met het glas hoeken van 45° maken hetzelve snijden.

§ 226. Uit de voorgaande bepalingen, in verband met hetgeen i § 221 gezegd is, volgt nog, *dat elke lijn, die loodregt op het glas staat in perspectief door het oogpunt zal gaan;* alsmede, *dat elke horizontale lijn die het glas onder eenen hoek van 45° snijdt, in perspectief door een d distantiepunten zal gaan;* en eindelijk, *dat evenwijdige lijnen, die teven evenwijdig aan het horizontale vlak loopen, in perspectief door een zelfde pu van den horizon zullen gaan.*

§ 227. Om een punt in perspectief te brengen, kan men ook d perspectieven bepalen van twee lijnen, die elk door het gegeven pun gaan, want dan zal het snijpunt van de perspectieven dezer lijnen d perspectief van het gegeven punt zijn.

Is, b. v., GS (fig. 101) het glas, GL de grondlijn en (O′, O″) h oog, zoodat O″ het oogpunt, en O′O de afstand van het oog tot h glas is, dan zal de lijn h n, die door O″ evenwijdig aan GL getrokke wordt, de horizon zijn, en men zal het distantiepunt D verkrijgen door op den horizon de lijn O″D = O′O te nemen. Is nu (P′, P″) h punt, dat in perspectief moet gebragt worden, dan is P″ de voet de loodlijn, die uit het gegeven punt op het glas valt, en dus is (§ 22 O″P″ de perspectief dezer loodlijn; neemt men nu $Pp = P'P$, en trek men P″p″ evenwijdig aan GL, dan is (P′p, P″p″) eene lijn, die doo het gegeven punt gaat, en (§ 32) evenwijdig loopt aan het horizontal vlak. Deze lijn maakt, omdat $Pp = P'P$ genomen is, eenen hoek va 45° met het glas, en snijdt hetzelve (§ 56) in p″; de perspectief deze lijn is dus (§ 226) Dp″. Daar nu O″P″ en Dp″ de perspectieven zij van twee lijnen, die elk door het gegeven punt gaan, zoo is het snij punt p dezer perspectieven de perspectief van het gegeven punt.

Had men het distantiepunt D ter linkerzijde van O″ genomen, da zou men $Pp = P'P$ ter regterzijde van P op de grondlijn hebben moete uitzetten, en, de bovenverklaarde constructie volgende, zou men alsda dezelfde perspectief p gevonden hebben.

§ 228. Men kan bij het toepassen der voorgaande leerwijze ook no eenen anderen weg volgen.

Laat weder h n (fig. 102) de horizon, O″ het oogpunt, D he distantiepunt en (P′, P″) het gegeven punt zijn. Trekt men nu, m $Pp = P'P$ genomen te hebben, de lijnen PO'' en pD, dan is de eerst de perspectief van eene loodlijn, die uit de horizontale projectie va het gegeven punt op het glas valt, terwijl de tweede de perspectief i

van eene lijn, welke uit diezelfde horizontale projectie in het horizontale vlak getrokken is, en met het glas eenen hoek van 45° maakt: het snijpunt p' der lijnen PO'' en pD is dus de perspectief van de horizontale projectie van het gegeven punt. Wordt nu uit p' eene loodlijn $p'p$ op de grondlijn getrokken, dan is deze loodlijn (§ 224) de perspectief van eene verticaal, die door het gegeven punt gaat; en daar $O''P''$ de perspectief is van de loodlijn, die uit het gegeven punt op het glas valt, zoo zal het snijpunt p dezer perspectieven de perspectief van het gegeven punt wezen.

§ 229. Wanneer men beproeft, om eenig voorwerp, waarvan vooraf de beide projectiën bepaald zijn, volgens eene der hiervoren opgegevene leerwijzen (§ 214, § 215, § 227, § 228), in perspectief te brengen, zal men bevinden, dat de constructielijnen en de projectiën van het voorwerp op eene lastige wijze door de perspectivische teekening heen loopen. Men is namelijk bij het toepassen dezer leerwijzen genoodzaakt, om de beide projectiën van het voorwerp, ten opzigte van de projectievlakken, op derzelver natuurlijke plaats te stellen; immers door de beide projectiën van punten op twee projectievlakken, worden deze punten in de ruimte op zich zelven en onderling bepaald, en zij zouden dus noch op zich zelven, noch onderling bepaald wezen, wanneer men alleen de afstanden gaf, waarop elk hunner zich van de beide projectievlakken bevindt. Neemt men echter nog een derde projectievlak aan, dat loodregt op de beide eerste staat, en beschouwt men dus de punten in de ruimte ten opzigte van drie projectievlakken, die loodregt op elkander staan, dan zullen deze punten op zich zelven en onderling volmaakt bepaald wezen, door de afstanden, die zij van elk der projectievlakken hebben; door middel van deze afstanden moeten dus ook die punten in perspectief kunnen gebragt worden, zonder dat het noodig zij, derzelver projectiën op de natuurlijke plaats werkelijk te teekenen.

Is, b. v., GH (fig. 103) het horizontale vlak, GS het glas, dat als verticaal vlak wordt aangenomen, en SH een tweede verticaal vlak, dat loodregt door de grondlijn GL gaat, dan zal eenig punt P in de ruimte volmaakt bepaald wezen, door de afstanden PV, PE en PA, waarop hetzelve zich van elk dezer projectievlakken bevindt. Om deze afstanden te onderscheiden, wordt PV = LK de hoogte, PE = LW de diepte, en PA = LB de breedte van het punt P genoemd; terwijl van de lijnen LS, LH en LG, waarop, van L af, deze afstanden gemeten worden, de eerste den naam van *schaal der hoogten*, de tweede dien van *schaal der diepten*, en de derde dien van *schaal der breedten* draagt. Worden nu de vlakken GH en SH, om de lijnen GL en LS, in het verlengde van het glas of in het vlak van teekening nedergeslagen, dan zal de schaal der diepten LH in het verlengde van die der hoogten komen te vallen.

§ 230. Zijn nu LS, LH en LG (fig. 104) de schalen der hoogten, diepten en breedten van punten in de ruimte, en waarop dus de afstanden gemeten worden, die deze punten elk in het bijzonder hebben van het horizontale vlak GH, van het glas GS en van een verticaal vlak SH, dat in L loodregt door de grondlijn GL gaat; is verder O

het oogpunt, OD de afstand van het oog tot het glas, en dus D het distantiepunt, dan merke men op, dat de lijnen GL en LS, of de schalen der breedten en hoogten, als beide in het glas liggende, bij het in perspectief brengen geene verandering zullen ondergaan. Om dus LH, of de schaal der diepten, die in L het glas ontmoet, en loodregt op hetzelve staat, ook op het glas over te brengen, trekke men de lijn LO, welke alsdan (§ 226) de perspectief van de schaal der diepten zal wezen. Deze lijn LO wordt eene *wijkende schaal* genoemd, omdat op dezelve de perspectivische of wijkende diepten van gegevene punten bepaald worden.

Om nu het punt P, door middel van de afstanden LK, LW en LB, die hetzelve bepalen, in perspectief te brengen, zette men vooreerst de diepte LW′ = LW op de grondlijn uit, en trekke DW′, dan zal, omdat DW′ (§ 226) de perspectief van WW′ (*), en OL de perspectief van LH is, w de perspectief van W, en dus Lw de perspectief van LW′, dat is, de perspectivische of wijkende diepte van het punt W wezen. Trekt men daarna de lijn w v evenwijdig aan de grondlijn, dan is deze lijn w v (§ 224) de perspectief van WV, en gaat dus door de perspectief van den voet der loodlijn, die uit het gegeven punt op het horizontale vlak valt; wordt alzoo de breedte LB op de grondlijn uitgezet, en trekt men de lijn BO, dan is BO (§ 226) de perspectief van BV, en dus v de perspectief van de horizontale projectie van het gegeven punt. Zet men eindelijk de hoogte LK op de schaal der hoogten uit, en trekt men KO, dan is KO (§ 226) de perspectief van KA, en trekt men w q evenwijdig aan LS, dan is (§ 224) w q de perspectief van AW; wordt nu uit q eene lijn evenwijdig aan de grondlijn, en uit v eene lijn loodregt op dezelve getrokken, dan is q p (§ 224) de perspectief van AP, en v p de perspectief van VP; het punt p, waar q p en v p elkander snijden, zal derhalve de perspectief van het gegevene punt zijn.

Het is klaar, dat als men BE = LK neemt, de lijn EO trekt, en uit v eene loodlijn op de grondlijn, het snijpunt p der lijnen EO en p v ook de begeerde perspectief zal aanwijzen; want EO is de perspectief van EP, en v p de perspectief van VP.

De lijn w v is nu de perspectivische breedte, Lw de perspectivische diepte, en p v de perspectivische hoogte van het gegeven punt.

§ 231. Daar het er slechts op aankomt, om de perspectief v van den voet der loodlijn, die uit het gegeven punt op het horizontale vlak valt, alsmede de perspectivische hoogte van het gegeven punt te bepalen, kan men bij het toepassen der voorgaande leerwijze nog eenen anderen weg volgen.

Men neme namelijk LB gelijk aan de gegevene breedte, en trekke BO, vervolgens neme men BV′ gelijk aan de gegevene diepte, en trekke V′D, dan zal het snijpunt der lijnen V′D en BO de perspectief v van den voet der loodlijn aanwijzen; want V′D is de perspectief van V′V, en BO de perspectief van BV. De perspectivische hoogte kan dan weder op gelijke wijze als boven gevonden worden.

(*) Bij het nagaan dezer constructie, dient men de figuren 102 en 104 telkens met elkander te vergelijken.

§ 232. Wordt het vlak SH (fig. 103) evenwijdig aan zich zelven verplaatst, dan zal wel de breedte van het punt P, maar geenszins deszelfs hoogte of diepte veranderen. Men behoeft dus niet, om de perspectivische hoogte van het gegeven punt te vinden, deszelfs hoogte uit het punt L of uit het punt B op de grondlijn uit te zetten, maar men zal daartoe elk willekeurig punt L′ (fig. 104) in de grondlijn kunnen nemen. Neemt men namelijk L′K′ = LK, en trekt men L′O en K′O, dan is L′O de perspectief van eene loodlijn op het glas, en bepaalt dus den stand van het verplaatste verticale vlak; is nu v geconstrueerd, en trekt men uit het snijpunt van L′O met de lijn, die uit v evenwijdig met de grondlijn getrokken wordt, eene lijn loodregt op de grondlijn tot aan K′O, dan zal deze lijn insgelijks de perspectivische hoogte wezen.

Uit het verhandelde in deze § volgt nog, dat alle punten in de lijn PA (fig. 103) dezelfde perspectivische diepte en hoogte zullen hebben, en dat de perspectief van elke lijn, die in het vlak PW gelegen, en gelijk en evenwijdig is aan PV, even zoo lang zal wezen als de perspectief van PV. Zoo is reeds uit de constructie gebleken, dat de perspectieven van PV en AW even lang zijn, en dit is ook daaruit op te maken, dat, het glas evenwijdig zijnde aan het grondvlak der piramide, waarvan het oog de top, en PVWA het grondvlak is, de doorsnede van het glas met deze piramide gelijkvormig zal wezen aan PVWA.

§ 233. In plaats van de uiteinden der hoogte van eenig punt telkens met het oogpunt te vereenigen, en dus de perspectief der hoogte te bepalen door loodlijnen, die in deze uiteinden op het glas vallen, kan men de uiteinden der hoogte ook met een willekeurig punt van den horizon vereenigen, waardoor men (§ 226) de perspectieven verkrijgt van horizontale evenwijdige lijnen, die op eenen afstand, gelijk aan de hoogte, van elkander staan; alle lijnen, die tusschen deze twee perspectieven, evenwijdig aan de hoogte, getrokken worden, zullen nu perspectieven zijn van verticalen, die gelijk zijn aan deze hoogte, maar die verschillende diepten achter het glas hebben. Heeft men dus het punt v (fig. 104) bepaald, en vereenigt men de punten L′ en K′ met een willekeurig vergaarpunt V in den horizon, dan zal, als men uit v de lijn v w′, evenwijdig aan de grondlijn, en uit w′ de lijn w′ q′ evenwijdig aan L′K′ trekt, deze lijn w′ q′ (§ 232) gelijk zijn aan de perspectief van PV of AW (fig. 103); want w′ q′ is de perspectief van eene lijn, die gelijk en evenwijdig is aan PV of AW, en in het vlak PW ligt. Men zal dus, door v p = w′ q′ loodregt op v w′ uit te zetten, ook de begeerde perspectief van het gegeven punt verkrijgen. Het aannemen van een willekeurig vergaarpunt in den horizon is alzoo een middel, om de perspectivische teekening van de menigte vergaarlijnen te bevrijden.

§ 234. Zoodra de stand van het oog bepaald is, is ook het vlak bepaald, dat door het oog loodregt op de grondlijn gebragt kan worden, en dat men het *oogvlak* noemt. Het is dit vlak, dat men meestal voor het tweede verticale vlak aanneemt, en men bepaalt dus de punten in de ruimte, ten opzigte van het horizontale vlak, het glas en het oogvlak. Wordt nu het punt P (fig. 103) zoodanig bepaald, dan zal

alleen de breedte LB (fig. 104) in *O*B veranderen, en het in perspectief brengen zal op dezelfde wijze, als boven aangetoond is, kunnen geschieden.

Door de laatste leerwijze, die in § 230 tot § 233 verklaard is, kan men de perspectivische teekening geheel van de projectiën des voorwerps en van de vergaarlijnen bevrijden, en het is daarom, dat deze leerwijze, meestal de *leerwijze der wijkende schaal* genoemd, altijd gevolgd wordt.

§ 235. Wanneer de afstanden der punten van eenig voorwerp tot de drie op elkander loodregt staande vlakken in getallen gegeven zijn, kan men op LG, LS en LH (fig. 105) de aangenomene eenheid eenige achtervolgende malen overbrengen, en hierop dus werkelijke schalen der breedten, hoogten en diepten construeren. Vereenigt men nu, na LO getrokken te hebben, de deelpunten op GL met het distantiepunt, en de deelpunten op SL met het oogpunt; trekt men voorts uit de punten a, b, enz., waarin LO door de lijnen, naar het distantiepunt loopende, gesneden wordt, lijnen evenwijdig aan GL en SL, dan zullen de lijnen, die uit de punten L, 1, 2, 3, enz. van GL, naar het oogpunt loopen, *wijkende schalen der diepten* zijn, terwijl de lijnen, die uit de punten a, b, enz. evenwijdig aan GL loopen, *wijkende schalen der breedten*, en de lijnen, die uit de punten a, b, enz. evenwijdig aan LS loopen, *wijkende schalen der hoogten* zullen wezen.

Heeft men nu vooraf, voor eene bepaalde eenheid, zulk een perspectivisch net vervaardigd, dan kan men zeer gemakkelijk, door middel van hetzelve, de punten van eenig voorwerp in perspectief brengen, als de afstanden dezer punten tot de drie vlakken in getallen gegeven zijn. Is, b. v., de diepte van een dezer punten 2, de breedte 5, en de hoogte 3 eenheden, dan blijkt uit het perspectivisch net, dat Lb de wijkende diepte, b q de wijkende breedte, en b s de wijkende hoogte van het gegeven punt is, en dat men dus, door p q = b s loodregt op q b uit te zetten, de begeerde perspectief p van hetzelve zal verkrijgen.

§ 236. Het kan somtijds gebeuren, dat men het oog zoo ver van het glas onderstelt, dat het distantiepunt buiten de teekening valt. Om in zoodanig geval, de deelpunten a, b, enz. op de lijn OL te vinden, voor een aantal van *m* eenheden op de grondlijn, neemt men op den horizon zoodanig evenmatig deel van OD, dat het punt d binnen de teekening valt. Is nu Od $= \frac{1}{n}$ OD genomen, dan verdeelt men elk der eenheden op de grondlijn in *n* gelijke deelen, en vereenigt deze deelpunten met het punt d, dan zullen deze lijnen door derzelver snijding met OL klaarblijkelijk ook de deelpunten a, b, enz. aanwijzen.

§ 237. Wanneer de diepte, breedte en hoogte van eenig punt in getallen gegeven zijn, en de lijnen LO en DO (fig. 104) mede in dezelfde eenheden bepaald zijn, zal men ook de perspectivische of wijkende diepte, breedte en hoogte van dit punt kunnen berekenen. Stelt men namelijk kortheidshalve LO = w, OD = a, LW = LW′ = d, LB = b, LK = BE = h, Lw = d′, w v = b′ en v p = h′ eenheden, dan zal het er

slechts op aankomen, om d', b' en h' in w, a, d, b en h uit te drukken. Hiertoe heeft men vooreerst

$$d' : d = w - d' : a,$$

waaruit $d' = \frac{d}{a+d} \cdot w$, en dus $w - d' = \frac{a}{a+d} \cdot w$;

verder is nog $b' : b = h' : h = w - d' : w$,

waaruit $b' = \frac{w-d'}{w} b = \frac{a}{a+d} \cdot b$,

en $h' = \frac{w-d'}{w} h = \frac{a}{a+d} h$.

§ 238. Om een voorbeeld te geven van de toepassing der leerwijze, die in § 230 tot § 233 verklaard is, stelle men zich voor, een regthoekig parallelopipedum in perspectief te moeten brengen, waarvan een der zijvlakken evenwijdig loopt met het glas.

Laat daartoe OL (fig. 106 *a*) de grondlijn, OG de horizontale doorgang van het oogvlak, $M'N'P'Q'$ de horizontale, en $M''R''T''P''$ de verticale projectie van het parallelopipedum wezen, dat nu ondersteld kan worden achter het glas te staan, wanneer men zich verbeeldt, dat het achterste gedeelte van het horizontale vlak om de lijn OL naar beneden is omgewenteld, tot dat hetzelve in het verlengde van het glas ligt. Laat verder GL (fig. 106 *b*) de grondlijn, HN de horizon, O het oogpunt en D het distantiepunt zijn. Neemt men dan OM gelijk aan den afstand, waarop het naaste zijvlak des ligchaams van het oogvlak staat, en maakt men MM' gelijk aan den afstand, waarop het voorste zijvlak des ligchaams van het glas ligt; zet men vervolgens $M'N'$ gelijk aan de diepte, en MQ gelijk aan de breedte des ligchaams, op de grondlijn uit, dan zal, door M' en N' met het distantiepunt, M en Q met het oogpunt te vereenigen, en uit n en m lijnen evenwijdig aan de grondlijn te trekken, de vierhoek $nmqp$ ontstaan, die de perspectief van het grondvlak des ligchaams zou wezen, wanneer men hetzelve ondersteld had op het horizontale vlak te staan. Neemt men nu op de schaal der hoogten, die uit een willekeurig punt L van de grondlijn, loodregt op dezelve, getrokken is, $P''L$ gelijk aan de hoogte, waarop het grondvlak des ligchaams boven het horizontale vlak ligt, en verder $P''T''$ gelijk aan de hoogte des ligchaams, dan zal men, door de punten L, T'' en P'' met een willekeurig vergaarpunt V in den horizon te vereenigen, de lijnen mq en np te verlengen, en uit q' en p' loodlijnen op de grondlijn te trekken, de perspectivische hoogten van de hoekpunten des ligchaams bepaald hebben. Trekt men dus eindelijk uit n, m, q en p loodlijnen op de grondlijn, en uit p'', q'', u'' en t'' lijnen evenwijdig aan dezelve, dan zal de doorsnijding dezer lijnen de begeerde perspectivische teekening van het parallelopipedum opleveren.

Door op te merken, dat de lijnen RS, TU, MN en QP naar het oogpunt moeten loopen, zal men verschillende lijnen in de constructie kunnen uitwinnen, tenzij men dezelve trekken wil, om de deugdelijkheid der constructie te beproeven.

§ 239. Wil men het ligchaam in perspectief brengen, in de onderstelling, dat hetzelve, even hoog boven het horizontale vlak blijvende, eenen anderen stand heeft, ten opzigte van het glas en het oogvlak, dan zal men, in plaats van de horizontale projectie M'N'P'Q' (fig. 106 *a*) te verplaatsen, tot dat zij ten opzigte van de lijnen *O*L en *O*G den begeerden stand aanneemt, alleen eenen regten hoek L'*O*'G' om de horizontale projectie behoeven te beschrijven, ten opzigte van welken zij denzelfden stand heeft, en vervolgens uit de punten M', N', P' en Q' loodlijnen op *O*'L' en *O*'G' neder te laten, welke loodlijnen alsdan de afstanden zullen aantoonen, waarop de hoekpunten des ligchaams zich van het glas en het oogvlak bevinden, terwijl de hoogten dezer punten boven het horizontale vlak dezelfde zijn gebleven. Door middel van deze afstanden zal men dan, op bovenverklaarde wijze, elk der hoekpunten in perspectief kunnen brengen, en deze perspectieven behoorlijk vereenigende, zal men de perspectief van het ligchaam in den gegevenen stand verkrijgen.

§ 240. De cirkel is eene figuur, die men dikwijls in perspectief moet voorstellen; dit kan vooreerst geschieden, door verscheidene willekeurige punten van den omtrek des cirkels in perspectief te brengen, en alsdan de begeerde kromme lijn uit de hand door deze geconstrueerde punten te trekken. Men kan echter spoediger en gemakkelijker te werk gaan, door om den cirkel een vierkant te beschrijven, in dit vierkant de beide diagonalen te trekken, en vervolgens de vier raakpunten aan den cirkel, alsmede de snijpunten met de diagonalen, in perspectief te brengen; deze acht punten zijn meestal genoegzaam, om de perspectief des cirkels te bepalen.

Laat, b. v., N (fig. 107) het middelpunt eens cirkels zijn, gelegen in het horizontale vlak, ABCD het omgeschreven vierkant, AC en BD deszelfs diagonalen, en IK en LM de middellijnen des cirkels, die de raakpunten vereenigen, dan is a b c d de perspectief van het vierkant, en a c en b d zijn de perspectieven van deszelfs diagonalen, terwijl het snijpunt n de perspectief van het middelpunt des cirkels is. Trekt men nu door n de lijn i k evenwijdig met de grondlijn, en vereenigt men *l* met O'', dan zijn i, k, l en m de perspectieven van de vier raakpunten aan den cirkel; brengt men voorts de lijnen EG en FH in perspectief, dan zullen de punten e, f, g en h, waarin deze perspectieven die der diagonalen snijden, de perspectieven der vier overige punten wezen. Worden eindelijk deze acht punten uit de hand door eene kromme lijn vereenigd, dan zal men ten naastenbij de begeerde perspectief des cirkels bekomen.

§ 241. Verbeeldt men zich de gezigtstralen, die uit al de punten van den omtrek des cirkels naar het oog gaan, dan vormen deze gezigtstralen het oppervlak eens kegels, waarvan het oog de top is: de doorsnede van dezen kegel met het glas is de perspectief van den cirkel. Daar nu het glas niet evenwijdig is aan den gegevenen cirkel, of aan het grondvlak des kegels, zoo zal deze doorsnede, of de perspectief des cirkels, hier eene ellips wezen, waarvan m l de kleine as, en dus het midden van m l het middelpunt zal wezen.

§ 242. Door middel van elk der boven opgegevene leerwijzen, zal men altijd de perspectief van eenig voorwerp wiskunstig kunnen construeren; echter geven de eigenschappen van de vloeistof, waardoor men de ligchamen ziet, en de inrigting van het zintuig, waarmede men hen ziet, voor den stand van het oog en van het glas zekere grenzen aan, door welke te overschrijden, eene perspectivische teekening niet het ligchaam zou voorstellen, dat haar heeft opgeleverd, en zelfs geheel valsch zou wezen, al ware zij ook strengelijk naar de opgegevene regels geconstrueerd.

De kennis dezer grenzen volstrekt noodzakelijk zijnde, om bij het perspectivische teekenen de gegevens behoorlijk aan te nemen, zullen dezelve hier worden opgegeven.

§ 243. De natuurlijkste stand om voorwerpen te beschouwen, is er zich regt tegen over te plaatsen. Het oog moet dus gelegen wezen in het verticale vlak, dat het glas of tafereel, waarop men teekent, in twee gelijke deelen verdeelt; het oogpunt, of de verticale projectie van het oog, zal dan gelegen wezen in de verticaal, die het glas in twee gelijke deelen verdeelt.

§ 244. Onderstelt men den beschouwer op de natuurlijkste wijze geplaatst, dan zal het oog op de hoogte van een gewoon mensch boven het horizontale vlak verheven wezen; het oogpunt moet dus, volgens de schaal, waarnaar men teekent, op deze hoogte boven de grondlijn genomen worden. Neemt men het oog hooger, en onderstelt men dus den beschouwer op eene verhevenheid geplaatst, dan wordt de teekening, die er ontstaat, eene *vogelvlugt-perspectief* genoemd.

§ 245. Men weet, bij ondervinding, dat het gedeelte van de ruimte, hetwelk men overziet, begrensd wordt door eenen regten kegel, welks tophoek 90° is; maar de stralen, die zeer hellende zijn ten opzigte van het oppervlak des oogs, leveren slechts een verward gezigt op, zoodat het gedeelte van de ruimte, dat men duidelijk overziet, slechts moet beschouwd worden, als begrensd te zijn door eenen regten kegel, die eenen tophoek van 30° heeft.

Men besluit uit deze laatste grens, dat, zal eene teekening duidelijk en met eenen enkelen oogopslag overzien worden, de gezigtstralen, die uit de uiteinden van hare grootste afmeting naar het oog gaan, geene hoeken mogen bevatten, die grooter zijn dan 30°. Daar nu van eenen gelijkbeenigen driehoek, welks tophoek 30° is, de hoogte ten naastenbij het dubbel van de basis is, zoo volgt hieruit, dat de afstand van het oog tot het glas, niet minder mag wezen, dan tweemaal de grootste afmeting der teekening, hetzij de hoogte of de breedte.

Het is om deze redenen, dat als men een gebouw in zijn geheel wil overzien, men zich altijd op eenen afstand van hetzelve moet plaatsen, die het dubbel is van de hoogte dezes gebouws, of van deszelfs breedte, zoo die de hoogte overtreft.

Voor zeer kleine teekeningen moet de voorgaande regel zoodanig gewijzigd worden, dat de afstand van het oog tot het glas nimmer minder dan twee palmen mag genomen worden, omdat een gewoon oog zoodanige teekeningen op eenen kleineren afstand niet duidelijk kan overzien.

OVER DE SCHADUWEN.

§ 246. Dewijl het licht zich in eene gelijkslachtige middenstof volgens regte lijnen en naar alle zijden verspreidt, zullen de stralen, die van een lichtend punt uitgaan, de geheele ruimte vervullen, indien er zich nergens eenig ligchaam bevindt, dat hen in hunne rigting belemmert. Bevindt er zich echter in deze ruimte een ondoorschijnend ligchaam, dan worden de stralen, die hetzelve ontmoeten, tegengehouden, terwijl de overige hunnen weg vervolgen. Er zal dus achter het ondoorschijnend ligchaam een gedeelte van de ruimte bestaan, dat geen licht ontvangt, en het is dat gedeelte, hetwelk men de *schaduw* des ligchaams noemt. In de gewone wijze van spreken, alsmede in de perspectief, verstaat men echter door schaduw, niet de geheele ruimte, die door den stand van een ligchaam vóór een lichtend punt van licht beroofd wordt, maar alleen de projectie van deze ruimte op het oppervlak, dat haar opvangt. Aldus wordt de volstrekte schaduw van ligchamen, die door de zonnestralen beschenen worden, op het oppervlak der aarde geprojecteerd, en vormt daar de bijzondere schaduw dezer ligchamen.

De theorie der schaduwen bevat, even als die der perspectief, twee bijzondere deelen: het eene bestaat in het bepalen van den omtrek der schaduwen, en dit behoort tot het gebied der zuivere wiskunst; het andere houdt zich bezig met het onderzoek naar de zwaarte der tinten, die men aan elk deel der oppervlakken moet geven, op welke deze schaduwen vallen, en dit behoort tot de lucht-perspectief. Het is over het eerste dezer deelen, dat hier in het bijzonder zal worden gehandeld.

§ 247. Bij meetkunstige teekeningen, neemt men alleen het licht der zon in aanmerking, en beschouwt de stralen, die van de zon uitgaan, wegens den grooten afstand van dit hemelligchaam, als onderling evenwijdig (*); hunne rigting wordt dan door de projectiën van een' der lichtstralen gegeven.

§ 248. Wanneer zich nu in eene verlichte ruimte een ondoorschijnend punt bevindt, dan is het klaar, dat de lichtstraal, die op dit punt valt, zijnen weg niet kan vervolgen, en dat dáár, waar hij een

(*) De stralen, die uit de uiteinden van de middellijn der zon tot een zelfde punt van de aarde komen, maken met elkander eenen hoek van slechts 32'3''.

oppervlak snijdt, hetwelk de lichtstralen opvangt, een niet-verlicht punt zal ontstaan. Dit laatste punt is alsdan de schaduw van het eerste op dat oppervlak. De schaduw van een punt op eenig oppervlak wordt derhalve gevonden, door uit het punt eenen lichtstraal te trekken, dat is, eene lijn, die evenwijdig loopt met de rigting der lichtstralen, en het snijpunt te construeren van deze lijn met het oppervlak, waarop de schaduw moet bepaald worden. Dit snijpunt is alsdan de gezochte schaduw.

Dewijl, behalve de punten, gelegen in elk der beide projectievlakken, alle punten der ruimte door hunne projectiën worden voorgesteld, zoo kan de schaduw van een punt, of van eenig ander voorwerp, wanneer die schaduw niet op een dezer vlakken zelven valt, alleen door hare projectiën worden aangewezen.

§ 249. Verbeeldt men zich, dat door alle punten eener regte lijn lichtstralen worden gebragt, dan liggen deze, als evenwijdige lijnen zijnde, die door eene zelfde lijn gaan, in een zelfde vlak, en de doorsnede van dit vlak met eenig oppervlak bevat klaarblijkelijk de snijpunten van al deze stralen met dit oppervlak, dat is, de schaduwen van alle punten der regte lijn; deze doorsnede is alzoo de schaduw der regte lijn zelve. Moet men dus de schaduw van eene regte lijn op eenig oppervlak bepalen, dan brengt men door deze lijn een vlak, dat evenwijdig is met de rigting der lichtstralen, welk vlak *schaduwvlak* genoemd wordt, en men bepaalt de doorsnede van dit vlak met het gegeven oppervlak.

Is de gegevene regte lijn evenwijdig met de lichtstralen, dan is hare schaduw een enkel punt.

Is het oppervlak, dat de schaduw opvangt, een plat vlak, dan is de schaduw eener regte lijn op hetzelve, mede eene regte lijn, en wordt dus door twee punten bepaald. Om derhalve de schaduw van eene in lengte gegevene lijn op een plat vlak te bepalen, behoeft men alleen de schaduwen van derzelver uiteinden te bepalen, en deze door eene regte lijn te vereenigen.

§ 250. Valt de schaduw van eene regte lijn te gelijkertijd op twee vlakken, b. v. op de beide projectievlakken, dan vertoont zij zich op het vlak van teekening als eene gebrokene lijn, wanneer namelijk het schaduwvlak der gegevene lijn niet loodregt is op beide projectievlakken; want in dit laatste geval is hare schaduw eene regte lijn, die loodregt door de as van projectie gaat (§ 33).

§ 251. De schaduw eener kromme lijn op eenig oppervlak, is de vereeniging der schaduwen, die al derzelver punten op dat oppervlak werpen. Zij is dus eigenlijk de doorsnede van het oppervlak, dat de schaduw opvangt, met een cilindervlak (*), dat de kromme lijn tot rigtlijn heeft, en waarvan de beschrijvende lijn evenwijdig is aan de rigting der lichtstralen.

(*). Een cilindervlak ontstaat in het algemeen door de beweging van eene regte lijn, die altijd evenwijdig blijft aan eene gegevene lijn, en op eene gegevene kromme lijn blijft rusten. De regte lijn wordt alsdan de *beschrijvende lijn*, en de kromme lijn de *rigtlijn* van het cilindervlak genoemd.

§ 252. Om de schaduw te bepalen, die een ligchaam op eenig oppervlak werpt, verbeelde men zich dit ligchaam omhuld en omsloten door een cilindrisch of prismatisch oppervlak, welks beschrijvende lijn evenwijdig is met de lichtstralen (*); de doorsnede van dit omhullende vlak met het oppervlak, dat de schaduw opvangt, is alsdan de omtrek van de gezochte schaduw; want het is klaar, dat alle lichtstralen, die binnen het omhullende vlak vallen, door het ondoorschijnend ligchaam worden opgevangen, en dat derhalve het gedeelte van de door het omhullende vlak ingeslotene ruimte, dat zich aan de niet-verlichte zijde van het schaduwwerpende ligchaam bevindt, van licht beroofd is, en alzoo in schaduw ligt. De geheele onbepaalde ruimte, die tusschen het omhullende vlak gelegen is, wordt *schaduwligchaam* genoemd.

Men ziet gemakkelijk in, dat de lijn, volgens welke het omhullende vlak het gegeven ligchaam aanraakt, het oppervlak dezes ligchaams in twee deelen verdeelt, waarvan het eene verlicht, en het andere niet verlicht is, of in schaduw ligt. Eene schaduw, die zich als deze op het ligchaam zelven bevindt, wordt de *zijschaduw*, of de *eigene schaduw*, des ligchaams genoemd; daarentegen noemt men de schaduw, die door een ligchaam op een ander voorwerp geworpen wordt, deszelfs *slagschaduw*.

§ 253. Dewijl de omtrek der slagschaduw eigenlijk niet anders is, dan de schaduw der lijn, volgens welke het omhullende vlak het ligchaam aanraakt, zoo is het klaar, dat het, bij de constructie der slagschaduw, voornamelijk op het bepalen dezer raaklijn aankomt, welker schaduw men alsdan volgens § 249 of § 251 bepaalt. Deze lijn, die de grens tusschen licht en schaduw op het ligchaam aanwijst, wordt daarom ook de *schaduwlijn* des ligchaams genoemd. Bij ligchamen, die door platte vlakken begrensd worden, is het omhullende vlak een prismatisch vlak, en deszelfs raaklijn met het ligchaam is uit regte lijnen, namelijk de ribben, die schaduw werpen, zamengesteld. Bij zoodanige ligchamen kan men meestal gemakkelijk de ribben onderkennen, die schaduw werpen; is men daaromtrent echter in het onzekere, dan behoeft men slechts de schaduwen der twijfelachtige ribben te construeren, en men zal dan uit den omtrek der schaduw kunnen zien, welke ribbe door hare schaduw een deel van den omtrek der slagschaduw oplevert.

Tot opheldering van hetgeen over het bepalen der schaduwen gezegd is, dienen de constructiën van de volgende werkstukken.

§ 254. Werkstuk. *De schaduw eener regte lijn te bepalen.*

Is (A′B′, A″B″) (fig. 108) de gegevene lijn, en (L′l′, L″l″) de rigting der lichtstralen, dan brenge men door de uiteinden (A′, A″) en (B′,B″) der gegevene lijn, lijnen evenwijdig met de gegevene rigting, en zoeke de snijpunten C′ en D′ van deze lijnen met het horizontale vlak, of in het algemeen met dat projectievlak, hetwelk het eerst door dezelve gesneden wordt, dan is de lijn C′D′, die deze snijpunten vereenigt, wanneer zij in een zelfde projectievlak liggen, de gezochte schaduw.

(*) Wanneer het licht uit een enkel punt voortkomt, zal dit omhullende vlak overgaan in eenen kegel of piramide, waarvan het lichtende punt de top is.

Liggen echter beide snijpunten niet in een zelfde projectievlak, zoo als, b. v., met de lijn (B′E′,B″E″) plaats heeft, waar de door (E′,E″) gebragte lichtstraal eerst het verticale vlak in F″ snijdt, dan moet men nog de schaduw C′ van een ander punt (A′,A″) zoeken, om de rigting van het gedeelte D′*G*, dat in het eene vlak gelegen is, tot aan de as van projectie te verkrijgen, en D′*G*F″ zal dan de gezochte schaduw wezen.

Werpt de lijn (A′B′,A″B″) hare schaduw op het vlak N′*N*N″, dan vindt men derzelver projectiën H′I′ en H″I″, door uit (A′,A″) en (B′,B″) lichtstralen te trekken, en de punten (H′,H″) en (I′,I″), waar deze het gegeven vlak snijden, door eene regte lijn te vereenigen. De lijn (B′E′,B″E″) werpt hare schaduw deels op N′*N*N″, deels op het verticale vlak. De projectiën van het eene deel zijn H′*K* en *H*″K″, terwijl de schaduw op het verticale vlak is F″K″.

§ 255. Werkstuk. *Op een vierhoekig regthoekig prisma, dat met een zijner opstaande zijvlakken tegen het verticale vlak rust, ligt een regthoekig parallelopipedum: men vraagt de eigene schaduw en de slagschaduw te construeren.*

Laat (*A*B′C′*D*,*AD*H″E″) (fig. 109) het prisma, (*I*K″T″*M*, K″T″N″O″) het parallelopipedum, en (L′l′, L″l″) de rigting der lichtstralen zijn. Wat vooreerst het parallelopipedum betreft, merke men op, dat deszelfs onderste ribben (*I*K′, O″) en (K″T′, O″N″), de bovenste ribbe (T′*M*, T″), benevens de verticale ribbe (T′, T″N″) schaduw werpen. De lichtstraal, die door het punt (K′, O″) gaat, snijdt het zijvlak (*A*B′, E″*B*) in (P′, P″), derhalve is P″ de schaduw van het punt (K′, O″). De schaduw van het punt (*I*, O″) is O″, en dewijl het schaduwvlak, dat door de ribbe (*I*K′, O″) gaat, loodregt op het verticale vlak is, zoo is de lijn O″P″ de schaduw dezer ribbe; een gedeelte dezer schaduw ligt alzoo in het verticale vlak, en het andere gedeelte, tot aan P″, op het prisma. Om te onderzoeken, waar de schaduw van het parallelopipedum eene ribbe van het prisma, b. v. (C′, *C*G″) ontmoet, trekt men uit C′ eene lijn evenwijdig met de horizontale projectie des lichtstraals; hierdoor bepaalt men het punt (Q′, Q″) van de ribbe (K″T′, O″N″), welk punt zijne schaduw R″ op de ribbe (C′, *C*G″) werpt. Verder ziet men, dat deze ribbe (C′, *C*G″) de eigene schaduw begrenst, dewijl het zijvlak (C′*D*, *C*H″) door geene lichtstralen getroffen wordt. Het gedeelte (C′, *C*R″) van de verticale ribbe (C′, *C*G″) werpt de schaduw C′*SU*; de driehoek *DSC*′ is in de horizontale projectie onzigtbaar, als door het parallelopipedum bedekt wordende. De ribbe (T′*M*, T″) werpt de schaduw T″W, en de ribbe (T′, T″N″) de schaduw VW. De schaduw in de verticale ribbe, die door B′ gaat, wordt op dezelfde wijze als het punt R″ bepaald.

§ 256. Werkstuk. *De schaduw te construeren van eenen bol, die op het horizontale vlak ligt.*

Laat (M′, M″) (fig. 110) het middelpunt van den bol, en (L′l′, L″l″) de rigting der lichtstralen wezen, dan moet men (§ 253) eerst de kromme lijn bepalen, volgens welke een cilindervlak, welks beschrijvende lijn evenwijdig is aan de rigting der lichtstralen, den bol omvat. Deze lijn van aanraking is hier klaarblijkelijk een groote cirkel, welks vlak loodregt is op de rigting der lichtstralen. Men construere dus (§ 106) door het middelpunt een zoodanig vlak B′*B*B″, en bepale

(§ 181) deszelfs doorsnede (C'D'E'F', C''D''E''F'') met den bol. Tr
men daarna door een genoegzaam aantal punten dezer doorsnede, lij
evenwijdig met de lichtstralen, en bepaalt men de doorsnede d
lijnen met dat projectievlak, hetwelk zij het eerst ontmoeten, dan
men daardoor de slagschaduw van den bol verkrijgen. Valt de sl
schaduw op één der projectievlakken, dan zal de grens dezer schad
eene ellips wezen; valt zij op beide projectievlakken, dan zullen
grenzen dezer schaduwen gedeelten van ellipsen zijn. De bovengenoem
groote cirkel is tevens de grens van de eigene schaduw des bols.

§ 257. In de afgehandelde voorbeelden is aangenomen geworden, d
de lichtstralen eenen scherpen hoek met het horizontale vlak maakt
en dat zij van de linkerhand des beschouwers invielen. Ofschoon
de rigting, die men aan de lichtstralen wil geven, geheel en al
keurig is, zoo heeft men echter bij het bepalen der schaduwen
meetkunstige teekeningen, zich hoofdzakelijk ten doel gesteld, om
voorwerpen voor te stellen, als op de gunstigste wijze verlicht te zij
dat is, in den wiskundigen zin des woords, zoodanig, dat men dezelv
duidelijk en klaar zien kan. Onderzoeken wij nu, wanneer dit plaa
vindt. Zeker niet op den vollen middag, wanneer de slagschaduw
bijna geheel en al ontbreken, en het sterke, gelijkelijk verspreide lic
eerder verblindt, dan duidelijk maakt. Ook niet bij het op- of onderga
der zon, wanneer het licht zwak, en de slagschaduwen uitermate ve
lengd zijn; maar dan, wanneer de zon, tusschen het zenith en de
horizon staande; hare stralen in schuinsche rigting op horizontale e
verticale vlakken schiet.

Wat ten tweede de zijde betreft, van waar het licht komen moet
om een voorwerp duidelijk en klaar te zien, zoo zal zeker niemand
daartoe het voorwerp tusschen zich en de zon plaatsen, dewijl hij da
slechts de in schaduw liggende zijden beschouwt; ook zal men zijn
standplaats niet onmiddellijk tusschen de zon en het voorwerp nemen,
dewijl alsdan de slagschaduw des beschouwers op het bedoelde voor-
werp zou vallen. Men zal dus zulk eenen stand kiezen, waarbij me
het licht ter zijde heeft, en wel ter linkerzijde, om niet gehinderd
worden door de slagschaduw der regterhand, die somtijds tot het vasthouden
of tot het teekenen des voorwerps gebezigd moet worden. Het valt intus
schen niet te ontkennen, dat de handelwijze, om het licht van de linker-
zijde te doen invallen, slechts op het gebruik berust, en men zal du
ook, in voorkomende gevallen, wel van dezen regel mogen afwijken.

§ 258. Omtrent de hoegrootheid van den hoek, dien de licht-
stralen met de beide projectievlakken moeten maken, kan geen be-
paalde regel worden opgegeven. In allen gevalle moet men trachten
aan de lichtstralen zoodanige rigting te geven, dat door de liggin
der schaduwen de krommingen en buigingen der verschillende vlakke
des voorwerps duidelijk te voorschijn komen. Men is echter gewoon
twee bijzondere rigtingen der lichtstralen aan te wenden, die ten op
zigte van het gemak in de constructie eenige voordeelen opleveren. D
eerste is die, waarbij de beide projectiën der lichtstralen met de as va
projectie hoeken van 45° maken, en stelt dus eenen lichtstraal voor
die door het snijpunt van drie op elkander loodregt staande vlakke

gaat, en met elk dezer vlakken gelijke hoeken van omtrent 35°16′ maakt. De tweede is die, waarbij de lichtstralen zelven hoeken van 45° met het horizontale vlak maken. Eenige voorbeelden zullen dit ophelderen.

§ 259. Laat (MN, m n) (fig. 111) een regthoekig parallelopipedum zijn. Neemt men hier de rigting der lichtstralen zoodanig, dat derzelver beide projectiën hoeken van 45° met de as van projectie maken, dan zullen de in M′N en NN′ geprojecteerde ribben, schaduwen op het horizontale vlak werpen, en de uitgevoerde constructiën toonen aan, dat bij deze aangenomene rigting der lichtstralen, de breedte g h of k i der slagschaduw, gelijk wordt aan de hoogte m′n van het parallelopipedum.

In fig. 112 is een regthoekig parallelopipedum voorgesteld, dat door een kleiner overdekt wordt, en die beide tegen het verticale vlak rusten. Om de slagschaduw op het verticale vlak te verkrijgen, trekt men uit a, b en c lijnen′, evenwijdig met de verticale projectie van den lichtstraal, vervolgens zet men d B′ = dB en eA′ = eA op de as van projectie uit, en eindelijk trekt men uit A′ en B′ loodlijnen op de as van projectie en uit h eene lijn evenwijdig aan dezelve, dan zullen de grenzen der schaduw geheel en al bepaald wezen. Hierbij kan nog opgemerkt worden, dat l f = BG moet zijn.

Niet alleen bij veelvlakkige ligchamen, maar ook bij zulke, die door gebogene vlakken begrensd worden, levert het aannemen van bovenvermelde rigting der lichtstralen eenige voordeelen op, waarvan fig. 113 een voorbeeld geeft. Deze figuur stelt eenen hollen halven cilinder voor, die door eenen halven cilinder van gelijken straal overdekt is. De slagschaduw der ribbe (A, a′a) op het verticale vlak, valt in de lijn g h, die de figuur midden doordeelt, en de schaduw der horizontale ribbe (AB, a b) komt op datzelfde vlak als een halve cirkel voor, die op a b als middellijn beschreven is. Deze schaduw is inderdaad een elliptische boog, ontstaande uit de doorsnede van den cilinder met een vlak, dat door de schaduwwerpende ribbe evenwijdig aan de rigting der lichtstralen gebragt wordt. Men ziet echter, dat deze ellips zich als een cirkel projecteert, dewijl hare beide assen aan elkander gelijk zijn.

§ 260. Deze weinige voorbeelden zullen toereikend zijn, om de voordeelen te doen zien, die uit het aannemen van lichtstralen, welker projectiën hoeken van 45° met de as van projectie vormen, voortvloeijen. Dit neemt echter niet weg, dat er ook eenige nadeelen aan verbonden zijn: deze bestaan vooreerst in de te groote regelmatigheid der slagschaduwen, die ligtelijk aanleiding tot misverstand kan geven, en ten andere daarin, dat men het niet in zijne magt heeft, om de slagschaduwen naar het een of ander deel des voorwerps heen, of van hetzelve weg te leiden.

§ 261. Het aannemen der lichtstralen, waarvan fig. 114 een voorbeeld geeft, is bevrijd van dergelijke zwarigheden, en levert desniettemin zeer groote voordeelen in de constructie op. Het verlichte ligchaam is hier een regte cilinder, die op een regthoekig parallelopipedum rust. Aan de horizontale projectie OP van eenen lichtstraal, heeft men zoodanige rigting gegeven, dat de slagschaduw ergens naar eene geschikte plaats wordt heengeleid; daarbij is tevens aangenomen, dat de stralen

met het horizontale vlak, of met hunne horizontale projectie, hoek van 45° maken: hierdoor verkrijgt men het voordeel, dat ı hoogte der schaduwwerpende voorwerpen gemakkelijk de lengte der duw op het horizontale vlak kan gevonden worden, want deze zal nu gelijk zijn aan de hoogte des voorwerps boven het horiz vlak. Om dus in dit geval de slagschaduw te construeren, trek aan den cirkel, die de horizontale projectie des cilinders voorstelt, raaklijnen, evenwijdig met OP, en insgelijks uit Q en R twee l evenwijdig met OP; neemt men nu RS = QT = rr′, dan kan door het trekken van lijnen uit de punten T en S, evenwijdig r projectiën der ribben van het parallelopipedum, deszelfs schadu tooijen. Maakt men eindelijk OP gelijk aan de hoogte oo′, en bes men uit P, met den straal des cilinders, eenen cirkel, die klaarbli door de eerstgetrokkene raaklijnen wordt aangeraakt, dan zal de be slagschaduw bepaald wezen.

Moesten er op het verticale vlak insgelijks slagschaduwen geconst worden, dan zou men wel is waar, door den voor het horizontal aangenomenen lichtstraal, geen bijzonder voordeel verkrijgen; maa verhindert, om te onderstellen, dat op het verticale vlak het lig verlicht wordt in eene rigting, die onafhankelijk is van die op het zontale vlak. Men kan dus ook aan de verticale projectie der licht eene willekeurige, dat is eene behoorlijke rigting geven, en aann dat de lichtstralen met deze projectie wederom hoeken van 45° n

Vooral bij groote teekeningen, waar de platte grond en de op of de horizontale en verticale projectie, elk afzonderlijk worden gesteld, zal het aannemen van lichtstralen, die hoeken van 4 hunne projectiën maken, aanmerkelijke voordeelen opleveren.

OVER DE PROJECTIEN DER KROMME LIJNEN, DERZELVER RAAKLIJNEN, NORMALEN EN NORMALE VLAKKEN.

§ 262. De kromme lijnen worden hoofdzakelijk in kromme lijnen van *enkele* en van *dubbele kromming* onderscheiden. Wanneer alle punten eener kromme lijn in een zelfde vlak liggen, zoo als b. v. bij den cirkel plaats vindt, dan is zij eene kromme lijn van enkele kromming, of eene vlakke kromme lijn. Liggen de punten eener kromme lijn niet in een zelfde vlak, dan is zij eene kromme lijn van dubbele kromming. Wordt b. v. een plat vlak, waarop eene kromme lijn beschreven is, gebogen of opgerold, dan verkrijgt men eene kromme lijn van dubbele kromming; want de kromme lijn neemt alsdan eene nieuwe kromming aan, die uit de kromte ontstaat, welke men aan het vlak gegeven heeft. De vlakke kromme lijnen kan men zich verbeelden ontstaan te zijn, door een punt, volgens eene zekere wet, op een plat vlak te doen bewegen, blijft echter dat punt, gedurende zijne beweging, niet altijd in hetzelfde vlak, dan zal hetzelve, indien het werkelijk eene kromme lijn beschrijft, eene kromme lijn van dubbele kromming voortbrengen.

Eene vlakke kromme lijn kan ook in het algemeen beschouwd worden, als de doorsnede van een plat vlak met een gebogen oppervlak; en eene kromme lijn van dubbele kromming, als de doorsnede van twee gebogene oppervlakken. De doorsneden van twee gebogene oppervlakken zijn echter niet altijd kromme lijnen van dubbele kromming.

§ 263. Reeds in § 11 en 12 is aangetoond, hoe de projectiën eener kromme lijn gevonden worden, en dat door deze projectiën de kromme lijn zelve ook volkomen bepaald is. De projectiën eener kromme lijn zullen blijkbaar des te naauwkeuriger zijn, naargelang men meer punten van dezelve projecteert. Verder is het klaar, dat eene der projectiën van eene vlakke kromme lijn eene regte lijn zal wezen, wanneer het vlak der kromme lijn zelf een der projecterende vlakken wordt. Wanneer derhalve eene vlakke kromme lijn evenwijdig is aan een der vlakken van projectie, dan zal hare projectie op het andere vlak van projectie eene regte lijn zijn, die evenwijdig loopt aan de as van projectie, terwijl de projectie op het eerste projectievlak de ware gedaante en grootte van de kromme lijn in de ruimte zal voorstellen. De projectiën van eene kromme lijn van dubbele kromming kunnen echter nimmer regte lijnen worden, in welken stand de kromme in de ruimte ook moge geplaatst zijn, dewijl anders de kromme lijn in een plat vlak zou moeten gelegen wezen.

Zoolang men derhalve de vlakke kromme lijnen op zich zelven, en in geenerlei verband met grootheden beschouwt, die in andere vlakken liggen, kan men de vlakken, die door de kromme lijnen bepaald worden, als projectievlakken, en dus de kromme lijnen zelven als hare projectiën op dezelve aannemen; de andere projectiën liggen dan in de as van projectie (§ 16). Zoodra men echter de vlakke kromme lijnen in betrekking tot andere grootheden beschouwt, heeft men daartoe beide projectievlakken noodig. Dit laatste zal bij de kromme lijnen van dubbele kromming altijd het geval wezen.

§ 264. Wil men eene vlakke kromme lijn door hare beide projectiën bepalen, dan kunnen, dewijl al de punten der kromme in hetzelfde vlak moeten liggen, slechts de projectiën van drie punten dezer kromme naar welgevallen worden genomen, en de projectiën der overige punten moeten alsdan zoodanig bepaald worden, dat deze punten in het vlak dier drie punten komen te liggen. Van elk dezer overige punten kan men dus slechts ééne der beide projectiën willekeurig aannemen, en de andere projectie moet dan volgens § 86 bepaald worden. Hieruit blijkt tevens, dat men ook eene der beide projectiën der kromme geheel willekeurig, en van de andere projectie slechts drie punten kan aannemen; is echter het vlak gegeven, waarin de kromme lijn moet liggen, dan kan slechts eene van derzelver projectiën naar welgevallen worden aangenomen.

§ 265. Neemt men in elk der beide projectievlakken eene kromme lijn aan, dan zullen deze krommen altijd de beide projectiën van eenige vlakke kromme lijn of van eene kromme lijn van dubbele kromming voorstellen, mits de beide uiterste van de loodlijnen, die uit al de punten dezer krommen door de as kunnen getrokken worden, voor beide dezelfde zijn. Neemt men in het eene projectievlak eene regte, en in het andere eene kromme lijn aan, en zijn ook de beide uiterste van de loodlijnen, die uit al de punten dezer lijnen door de as kunnen getrokken worden, voor beide dezelfde, dan is men zeker, dat dit de beide projectiën zullen wezen van eene vlakke kromme lijn, welker vlak loodregt staat op dat projectievlak, waarop hare projectie eene regte lijn is.

§ 266. Wanneer de stand of de aard eener geslotene kromme lijn in de ruimte zoodanig is, dat hare beide projectiën $W'V'$ en $W''V''$ (fig. 115) insgelijks geslotene kromme lijnen zijn, zal men, om in geene dubbelzinnigheid te vervallen, de stukken ($K'W'I'$, $K''W''I''$) en ($K'V'I'$, $K''V''I''$) elk op eene verschillende wijze moeten teekenen, daar men anders in het onzekere zal wezen, of het punt S' met S'', dan wel met s'' overeenstemt.

§ 267. Snijdt eene kromme lijn eene andere kromme lijn, of een vlak, dan wordt de stand dezer kromme lijn ten opzigte van die andere kromme, of ten opzigte van dat vlak, bepaald door den hoek, dien zij met die kromme of met dat vlak maakt. De kennis van dezen hoek staat in een naauw verband met de beschouwing der raaklijnen.

Een oneindig klein gedeelte eener kromme lijn kan men als regt aanmerken, en zich alzoo verbeelden, dat de kromme uit een oneindig aantal oneindig kleine regte lijnen bestaat. Een zoodanig deeltje, dat men een *element* der kromme lijn noemt, behoort blijkbaar ook tot eene regte lijn, die ontstaat, wanneer men dit element verlengd denkt. Zulk eene regte lijn noemt men eene *raaklijn* aan de kromme, en het element, dat zij met elkander gemeen hebben, haar *raakpunt*.

Ook op de volgende wijze kan men zich een denkbeeld vormen van eene raaklijn aan eene kromme lijn. Men verbeelde zich, dat de kromme lijn door eene regte lijn in twee punten *a* en *b* gesneden wordt, waarvan het eene, b. v. *a*, onbeweeglijk is. Draait men nu de regte lijn om dit punt zoodanig, dat het punt *b* der kromme meer en meer tot het punt *a* nadert, dan vallen deze punten eindelijk in elkander, en de regte lijn heeft op dien oogenblik slechts het punt *a* met de kromme gemeen. In dezen stand wordt zij raaklijn aan de kromme in het punt *a* genoemd.

Eene kromme lijn raakt eene andere aan, wanneer zij een element met haar gemeen heeft, en dan is het verlengde van dit element raaklijn aan beide krommen. Twee elkander rakende kromme lijnen hebben derhalve in het raakpunt eene gemeenschappelijke raaklijn.

§ 268. De projectiën van een element eener kromme lijn zijn, als projectiën van eene oneindig kleine regte lijn, ook oneindig kleine regte lijnen, en maken gedeelten uit van de projectiën der kromme lijn; zij worden, verlengd zijnde, raaklijnen aan deze projectiën, en zijn dan niet anders, dan de projectiën van de raaklijn in de ruimte. Men verkrijgt derhalve de projectiën eener raaklijn aan eene kromme lijn in een gegeven punt, wanneer men in de projectiën van dat punt raaklijnen aan de projectiën der kromme trekt.

§ 269. De stand van de raaklijn aan eene kromme lijn is door het raakpunt geheel en al bepaald; maar de stand van eene kromme lijn, die eene andere aanraakt, is zulks door het raakpunt alleen nog niet, zoo als men gemakkelijk inziet, wanneer men zich de eene kromme om de gemeenschappelijke raaklijn beweegbaar denkt. Zij behoudt alsdan in alle standen steeds hetzelfde element met de andere kromme lijn, derhalve raken beide kromme lijnen elkander ook in al deze standen aan. Die stand, welken men bij het aanraken van twee kromme lijnen in het bijzonder in aanmerking neemt, zal in het vervolg (§ 271) nader beschouwd worden.

§ 270. Onder den hoek, dien twee elkander snijdende krommen met elkander maken, verstaat men den hoek, welken de raaklijnen, in het snijpunt aan beide krommen, met elkander vormen. Even zoo verstaat men onder den hoek, dien eene kromme lijn met een vlak maakt, den hoek, welken de raaklijn, aan de kromme in het snijpunt, met het vlak maakt. Kan men derhalve in gegevene punten der kromme lijnen raaklijnen aan dezelve trekken, en hare projectiën aanwijzen, dan zal men ook den bovenvermelden hoek volgens § 72 kunnen bepalen.

§ 271. Een vlak, hetwelk eene raaklijn, in haar raakpunt met eene kromme lijn, loodregt doorsnijdt, wordt een *normaalvlak* der kromme genoemd. Elke raaklijn heeft derhalve haar eigen normaalvlak. Bij eene vlakke kromme lijn wordt de regte lijn, die in het vlak der kromme ligt, en uit het raakpunt loodregt op de raaklijn is getrokken, eene *normaallijn* of *normaal* der kromme in het raakpunt genoemd; zij is derhalve de doorsnede van het vlak der kromme met het normaalvlak. Zoo is b. v. de straal eens cirkels, de normaal des omtreks in dat punt, hetwelk de straal met den omtrek gemeen heeft.

Bij kromme lijnen van dubbele kromming moet de normaal nog nader bepaald worden; want, dat zij in het raakpunt loodregt moet staan op

de raaklijn, is tot hare bepaling evenmin voldoende, als bij vlakke kromme lijnen. Men verbeelde zich, dat door de raaklijn in een punt *a* eener kromme lijn van dubbele kromming een vlak gebragt is, hetwelk deze kromme lijn nog in een punt *b* snijdt; wordt nu dit vlak om de raaklijn zoodanig bewogen, dat het punt *b* meer en meer tot *a* nadert, dan zal dit vlak bij elken stand van het punt *b* volkomen bepaald zijn, derhalve ook op den oogenblik, wanneer de punten *a* en *b* in elkander vallen. In dezen stand, waarin het vlak door drie achtervolgende punten der kromme gaat, en dus eigenlijk het vlak is, waarin de kromme voor het punt, dat men beschouwt, gelegen is, wordt hetzelve *tangentiaalvlak* genoemd. De doorsnede van het tangentiaalvlak met het normaalvlak, dat is, de lijn, die in het tangentiaalvlak ligt, en in het raakpunt loodregt staat op de raaklijn, is de *normaal* van de kromme lijn van dubbele kromming in het raakpunt *a*.

Door den in § 269 vermelden stand van twee elkander rakende kromme lijnen, verstaat men nu bepaaldelijk dien, waarbij zij een gemeenschappelijk tangentiaalvlak hebben; hare normalen vallen dan in elkanders verlengden, terwijl deze bij elken anderen stand der kromme lijnen eenen hoek met elkander maken.

§ 272. Uit de vorige § blijkt, dat de normaalvlakken der kromme lijnen gemakkelijk bepaald kunnen worden, zoodra men in staat is, raaklijnen aan de kromme, of aan derzelver projectiën te trekken. Bij vlakke kromme lijnen behoeft men namelijk slechts door het raakpunt een vlak te brengen, dat loodregt staat op de raaklijn (§ 109), dan is dit het begeerde normaalvlak, en de normaal wordt dan ook gemakkelijk op de volgende wijze bepaald.

Laat b. v. (A′B′C′, A″B″C″) (fig. 116), de projectiën eener vlakke kromme lijn wezen, en (A′D′, A″*D*) de projectiën van eene raaklijn aan deze kromme in het punt (A′, A″); bepaalt men dan het punt D′, waar deze raaklijn, en het punt E′, waar eene andere lijn (A′C′, A″C″), gelegen in het vlak der kromme lijn, het horizontale vlak ontmoeten, dan is D′E′ de horizontale doorgang van het vlak der kromme lijn, in welk vlak de begeerde normaal moet liggen, die tevens in het punt (A′, A″) loodregt op de raaklijn moet staan. Slaat men nu het vlak der kromme om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak, dan komt het punt (A′, A″) in F te vallen; D′F is derhalve de nedergeslagene raaklijn en de daarop loodregte FG′ de nedergeslagene normaal, welke het horizontale vlak in G′ snijdt. Het punt (G′, *G*) een tweede punt der normaal zijnde, zoo zullen G′A′ en *G*A″ de begeerde projectiën dezer lijn wezen.

Bij kromme lijnen van dubbele kromming komt het vooreerst op de bepaling van het tangentiaalvlak aan. Laat B′AC′ (fig. 117) de projectie wezen van zulk eene kromme op het normaalvlak, dat door het punt A gaat, dan is A de projectie der raaklijn in het punt A van de kromme in de ruimte (§ 271). Snijdt nu een vlak, dat door de raaklijn gebragt wordt, de kromme in het punt B, waarvan B′ de projectie is, dan is AB′ de projectie van dit geheele vlak op het normaalvlak. Beweegt zich verder het vlak zoolang om de raaklijn, totdat het punt B in het punt A valt, dan valt ook B′ in A, en de lijn AB′ komt in den stand AD, of wordt raaklijn aan B′AC′ (§ 267); en het vlak is nu tangen-

tiaalvlak geworden (§ 271). Dit vlak wordt derhalve bij eene kromme lijn van dubbele kromming bepaald door de raaklijn in de ruimte, en door de raaklijn, die in hetzelfde punt, aan de projectie der kromme op het normaalvlak, kan worden getrokken. Daar nu de normaal gevonden wordt (§ 271), door de doorsnede van het tangentiaalvlak met het normaalvlak te construeren, zoo is de normaal niets anders, dan de raaklijn, die in het punt, aan de projectie der kromme op het normaalvlak, kan worden getrokken.

Hoe eene kromme lijn van dubbele kromming op het normaalvlak kan worden geprojecteerd, zal later blijken (§ 345).

§ 273. Bij het trekken van raaklijnen aan kromme lijnen, komen drie gevallen voor. Er kan namelijk gevraagd worden, eene raaklijn te trekken: 1° aan een gegeven punt der kromme; 2° uit een gegeven punt buiten de kromme; 3° evenwijdig aan eene gegevene lijn. In het eerste geval behoeft men, volgens § 268, slechts raaklijnen in de projectiën van het gegeven raakpunt aan de projectiën der kromme te trekken, om de projectiën der raaklijn te vinden; in de twee andere gevallen komt het slechts op het bepalen van het raakpunt aan, zijnde deze gevallen dan tot het eerste teruggebragt. Zijn nu de projectiën der gegevene kromme, kromme lijnen, waarvan men de wet kent, volgens welke zij ontstaan zijn, dan wordt in de hoogere meetkunst en differentiaalrekening geleerd, hoe men aan zulke kromme lijnen, in elk der bovenopgegevene gevallen, raaklijnen kan trekken; in de beschrijvende meetkunst vergenoegt men zich meestal echter, met deze raaklijnen in al die gevallen slechts door het aanleggen van een liniaal op het oog te trekken.

§ 274. De in de vorige § opgegevene gevallen zijn alle echter niet altijd mogelijk.

Is de kromme eene vlakke kromme lijn, dan is het klaar, dat in het tweede geval een punt der raaklijn, hetwelk buiten de kromme lijn ligt, slechts in het vlak der kromme kan gelegen wezen, dewijl alle raaklijnen aan de kromme, als verlengden harer elementen, blijkbaar in het vlak der kromme liggen. In het derde geval ziet men gemakkelijk in, dat de lijn, waarmede eene evenwijdige raaklijn moet worden getrokken, zelf in het vlak der kromme moet liggen, of met dit vlak evenwijdig moet zijn.

Is de kromme lijn van dubbele kromming, en denkt men zich aan dezelve alle mogelijke raaklijnen getrokken, dan wordt door al deze raaklijnen een gebogen oppervlak bepaald, waarin omgekeerd alle raaklijnen aan de kromme moeten gelegen wezen; derhalve kunnen ook slechts raaklijnen aan de kromme getrokken worden uit zulke punten, welke in dit oppervlak gelegen zijn. Moet aan de kromme eene raaklijn getrokken worden, evenwijdig aan eene gegevene lijn, dan moet, om dezelfde reden, deze lijn evenwijdig gegeven zijn aan eene der ontelbare raaklijnen, welke aan deze kromme mogelijk zijn.

§ 275. In de hoogere meetkunst en differentiaalrekening leert men de merkwaardigste vlakke kromme lijnen kennen en derzelver eigenschappen opsporen. In de doorsnijding der gebogene oppervlakken zal men gelegenheid vinden, verscheidene kromme lijnen van dubbele kromming op te merken; eene dezer krommen, namelijk de *gewone schroeflijn*, zal hier nader beschouwd worden. Deze is eene kromme lijn, welke op eenen

regten cirkelvormigen cilinder zoodanig beschreven is, dat zij alle beschrijvende lijnen van het oppervlak onder gelijke hoeken doorsnijdt. Dat gedeelte der kromme lijn, hetwelk begrepen is tusschen eenig punt derzelve en een ander, waar zij een' volgenden keer dezelfde beschrijvende lijn snijdt, die door het eerste punt gaat, wordt *schroefgang*, en de afstand dezer twee punten de *hoogte van den schroefgang* genoemd.

§ 276. Verbeeldt men zich zulk een' schroefgang, met het gedeelte des cilindervlaks, waarop hij zich bevindt, op een plat vlak uitgespreid, dan vormt die schroefgang eene regte lijn, dewijl al deszelfs elementen de evenwijdige beschrijvende lijnen des cilindervlaks onder gelijke hoeken snijden, en de beschrijvende lijnen alle onmidellijk op elkander volgen. Een schroefgang is derhalve de hypothenusa eens regthoekigen driehoeks, welks hoogte gelijk is aan die des schroefgangs, en welks basis de omtrek van het grondvlak des cilinders is. Wanneer dus AA′ (fig. 118) gelijk aan den omtrek A′D′G′K′A′ van het grondvlak des regten cilinders (*), en A′N, loodregt op AA′, de hoogte des schroefgangs is, dan is de hypothenusa AN de ontwikkelde schroefgang. Verdeelt men nu AA′ en den omtrek A′D′G′K′A′ in een zelfde willekeurig aantal gelijke deelen, b. v. in twaalf, door de punten O, P, Q, enz. B′, C′, D′ enz., dan zullen de loodlijnen OB, PC, QD, enz. de hoogten aantoonen, die het punt, dat de schroeflijn heeft beschreven, achtervolgens boven het grondvlak des cilinders had, wanneer het, bij A′ beginnende, zich loodregt boven B′, C′, D′ enz. bevond, zoodat men zal hebben: $OB = \frac{1}{12} A'N$, $PC = \frac{2}{12} A'N$, $QD = \frac{3}{12} A'N$, enz. Men zal derhalve ook kunnen zeggen, dat de schroeflijn wordt voortgebragt door een punt, hetwelk zich op een cilindervlak zoodanig beweegt, dat deszelfs afgelegde weg steeds evenredig is met deszelfs verheffing boven het grondvlak des cilinders.

§ 277. Volgens de hierboven gemaakte opmerkingen, is nu de schroeflijn gemakkelijk te construeren. Laat daartoe A′B′C′ enz. (fig. 118) de horizontale, $AT'W''V''$ de verticale projectie des cilinders, en AN'' de hoogte des schroefgangs zijn. Men verdeele A′B′C′ enz. in een willekeurig aantal gelijke deelen b. v. in twaalf (hoe meer deelen men neemt, des te naauwkeuriger zal men de schroeflijn kunnen bepalen), en trekke de verticale projectiën OM'', PL'', QK'', enz. van de beschrijvende lijnen des cilinders, die met de deelpunten B′, C′, D′, enz. overeenkomen. Dewijl nu het voortbrengende punt, wanneer het zich loodregt boven B′, C′, D, enz. bevindt, de hoogten $\frac{1}{12} AN''$, $\frac{2}{12} AN''$, $\frac{3}{12} AN''$, enz. boven het horizontale vlak heeft (§ 276), zoo make men $OB'' = \frac{1}{12} AN''$, $PC'' = \frac{2}{12} AN''$, $QD'' = \frac{3}{12} AN''$, enz.; hierdoor verkrijgt men de punten B″, C″, D″, enz. G″, enz. K″, L″, M″, en door deze behoorlijk met elkander te vereenigen, de verticale projectie van eenen schroefgang. Maakt men B″O″, C″P″, D″Q″, enz. $= AN''$, dan verkrijgt men de verticale projectie van eenen tweeden schroefgang, enz. De horizontale projectie van de geheele schroeflijn ligt blijkbaar in den omtrek A′D′G′K′A′ van het grondvlak des cilinders.

(*) Onder de verschillende constructiën, door welke men eene regte lijn kan maken, die ten naasteenbij gelijk is aan den omtrek eens gegevenen cirkels, is de volgende eene der eenvoudigste. Als AC (fig. 119) de middellijn des cirkels is, trekke men CE loodregt op AC, make hoek CBD = 30° en DE = 3 BC, dan zal AE zeer nabij gelijk den halven omtrek wezen. Men zal namelijk vinden AE = 3, 14153 × BC.

§ 278. Dewijl de raaklijn aan de schroeflijn een element met dezelve gemeen heeft, en tevens het verlengde van dit element is; dewijl verder alle elementen der schroeflijn bij de ontwikkeling in eene regte lijn vallen, welke als het verlengde van elk harer elementen kan beschouwd worden, zoo zullen in deze regte lijn alle raaklijnen gelegen wezen, terwijl de hoek NAA′ (fig. 118), welken zij met AA′ maakt, de standvastige hoek zal zijn, dien de schroeflijn met het grondvlak des cilinders, en dus ook de hoek, dien elke raaklijn aan dezelve met het horizontale vlak maakt. Ingevolge deze opmerking, is het gemakkelijk, om in een punt (C′,C″) van de schroeflijn eene raaklijn aan dezelve te trekken. Deze moet namelijk slechts zoodanig getrokken worden, dat zij met het horizontale vlak eenen hoek NAA′ maakt. De horizontale projectie der raaklijn moet den cirkel A′B′C′ enz. in C′ aanraken (§ 268), en dus in C′ loodregt wezen op den straal MC′. Verder is de afstand C′X′, van het punt (C′,C″) tot aan het punt, waar de raaklijn in de ruimte het horizontale vlak snijdt, blijkbaar gelijk aan AP; trekt men dus X′*X* loodregt op de as, en vereenigt men *X* met C″, dan zal C″*X* de verticale projectie der raaklijn wezen. De punten D″, K″, Q″, enz. zijn buigpunten van de verticale projectie der schroeflijn; de raaklijnen aan deze punten zullen dus dáár de kromme te gelijkertijd raken en snijden.

Hoe eene schroef zelve werkelijk geteekend wordt, zal nader worden aangetoond. (§ 429).

Hier volgen nu nog eenige werkstukken over de kromme lijnen in het algemeen.

§ 279. Werkstuk. *De punten te bepalen, waarin eene gegevene kromme lijn de beide projectievlakken snijdt.*

Ter oplossing van dit werkstuk kan volmaakt dezelfde redenering toegepast worden, als die, welke in § 56 gebruikt is.

Laat b. v. (F′B′G′, F″B″G″) (fig. 120) de gegevene kromme lijn wezen, dan moeten (§ 28) de punten *A* en *C*, waarin de verticale projectie F″B″G″ de as snijdt, de verticale projectiën zijn van de doorsnede met het horizontale vlak. Trekt men dus uit deze punten loodlijnen op de as, dan zijn derzelver doorsneden A′ en C′, met de horizontale projectie FB′G′, de begeerde snijpunten met het horizontale vlak. Even zoo liggen de snijpunten der kromme met het verticale vlak, in de punten D″ en E″, waarin de verticale projectie gesneden wordt door de loodlijnen, die uit de snijpunten *D* en *E*, van de horizontale projectie met de as, op dezelve worden opgerigt.

Het is gemakkelijk in te zien, dat het gedeelte (*D*B′*E*, D″B″E″) de kromme lijn in de ruimte zich achter het verticale vlak bevindt, en dat de gedeelten (A′F′, *A*F″) en (C′G′, *C*G″) beneden het horizontale vlak gelegen zijn. De doorsneden der kromme met de projectievlakken dienen derhalve ook, om de zigtbare deelen van de onzigtbare, of van de, door de projectievlakken, bedekte deelen te onderscheiden.

§ 280. Dewijl men kromme lijnen niet even als regte lijnen verlengen kan, zoo kan men ook niet derzelver doorsneden met andere lijnen of met vlakken bepalen, wanneer deze snijpunten niet werkelijk voorhanden zijn, dat is, men kan niet bepalen, waar eene kromme lijn eene andere of een vlak snijdt, wanneer men niet in staat is, de kromme lijn in de

ruimte, en dan ook hare projectiën, tot aan het begeerde snijpunt te verlengen. De projectiën van kromme lijnen rigten zich namelijk zelden naar de wet, volgens welke de daarbij behoorende krommen ontstaan zijn, maar hangen, zoowel van den gegevenen stand der kromme, ten opzigte van de projectievlakken, als van de gedaante der kromme zelve af.

§ 281. Werkstuk. *Een vlak is door deszelfs doorgangen, en eene in dit vlak liggende kromme, door eene harer projectiën, b. v. de horizontale, gegeven: men vraagt de andere projectie dezer kromme te bepalen.*

Men neme in de gegevene horizontale projectie eene menigte punten aan, en bepale de overeenkomstige verticale projectiën, volgens § 87 of § 88, dan is de daardoor bepaalde kromme de begeerde verticale projectie.

§ 282. Werkstuk. *De doorsnede van eene gegevene kromme lijn met een gegeven vlak te bepalen.*

Hiertoe kan men op eene overeenkomstige wijze als in § 82 geraken. Construeert men namelijk de doorsnede van het gegeven vlak met een der projecterende vlakken van de kromme lijn, dan verkrijgt men eene andere kromme lijn, waarin noodzakelijk het begeerde snijpunt gelegen is; het punt, waar dus deze kromme lijn de gegevene snijdt, zal het gevraagde wezen.

Is b. v. (A'B', A''B'') (fig. 121) de kromme lijn en C'CC'' het vlak, dan wordt dit vlak door het projecterend vlak der kromme, waarvan de doorsnede met het horizontale vlak de horizontale projectie der kromme is, gesneden volgens eene kromme lijn, die F'G' tot horizontale projectie heeft, en het gevraagde snijpunt bevat. Zoekt men dus, volgens de vorige §, de verticale projectie F''G'' dezer kromme lijn, dan is hare doorsnede H'', met de verticale projectie A''B'' van de gegevene kromme, de verticale projectie van het gevraagde snijpunt, en de horizontale projectie H' van dit punt wordt nu gevonden, door uit H'' eene loodlijn door de as te trekken tot aan de horizontale projectie A'B'.

§ 283. Werkstuk. *Wanneer de projectiën eens cirkelboogs, benevens de doorgangen eens vlaks gegeven zijn, vraagt men de snijpunten des geheelen cirkelomtreks met het vlak te bepalen.*

Door drie willekeurige punten in den gegevenen boog aan te nemen, bepale men het vlak, waarin die boog gelegen is, en vervolgens de doorsnede dezes vlaks met het gegeven vlak (§ 114 en § 73). De punten, waarin de projectiën des cirkelboogs de gelijknamige projectiën van de doorsnede dezer vlakken snijden, zijn dan de projectiën der begeerde. Snijden deze projectiën elkander niet, dan toont dit aan, dat de gegevene boog het gegeven vlak niet snijdt. Alsdan moet men het vlak des boogs op een der projectievlakken nederslaan, en bepalen, waar de boog, en de doorsnede van deszelfs vlak met het gegeven vlak, komen te vallen (§ 94); vervolgens moet men den cirkel voltooijen, en zien, of hij die doorsnede al dan niet doorsnijdt. In het eerste geval zal men moeten bepalen, wat de projectiën dezer snijpunten zijn, wanneer het nedergeslagen vlak weder tot zijnen oorspronkelijken stand wordt teruggebragt (§ 95 en § 161).

§ 284. Werkstuk. *Gegeven zijnde het middelpunt, de straal en de as eens cirkels, dat is de lijn, die in het middelpunt loodregt staat op het vlak des cirkels, vraagt men de beide projectiën van dezen cirkel te bepalen.*

Brengt men door het middelpunt een vlak, loodregt op de as (§ 109), dan is dit het vlak des cirkels. Slaat men nu dit vlak om deszelfs hori-

zontalen doorgang neder op het horizontale vlak, en bepaalt men (§ 92), waar het middelpunt alsdan komt te vallen, dan zal, na uit dit middelpunt, met den gegevenen straal, eenen cirkel beschreven te hebben, dit werkstuk tot dat van § 161 teruggebragt zijn.

§ 285. Men kan dit werkstuk ook zonder behulp van het vlak des cirkels oplossen. De gevraagde projectiën namelijk zijn ellipsen, waarvan men de beide assen gemakkelijk kan bepalen. Om b. v. de assen van de horizontale projectie te vinden, is het klaar, dat de middellijn des cirkels, die evenwijdig loopt aan het horizontale vlak, zich op het langst zal projecteren, en dus door hare projectie, die gelijk is aan hare werkelijke lengte, de groote as der ellips zal aanwijzen. Deze groote as moet loodregt staan op de horizontale projectie van de as des cirkels; want de as des cirkels is loodregt op deszelfs middellijnen, en als twee lijnen in de ruimte loodregt op elkander staan, en eene derzelve evenwijdig is aan het vlak, waarop men projecteert, dan staan de projectiën dezer lijnen ook loodregt op elkander. Verder zal die der middellijnen, welke gelegen is in het projecterend vlak van de as des cirkels, en onder alle den grootsten hoek maakt met het horizontale vlak, zich op het kortst projecteren (§ 162); deze zal dus door hare projectie, welke op die van de as des cirkels valt, de kleine as der ellips aanwijzen. Door het projecterend vlak van de as des cirkels, met de daarin gelegene middellijn, op het horizontale vlak neder te slaan, zal de projectie van deze middellijn, dat is de kleine as der ellips, gemakkelijk kunnen geconstrueerd worden.

De beide assen van de ellips, volgens welke de cirkel zich op het verticale vlak projecteert, worden op eene dergelijke wijze bepaald.

Is b. v. (MN′, M″N) de as, (P′, P″) het middelpunt en r de straal des cirkels (fig. 122), dan zal, als men R′P′ = P′S′ = r loodregt op MN′ stelt, R′S′ de groote as wezen van de ellips, die de horizontale projectie des cirkels is. Slaat men vervolgens de as des cirkels om derzelver horizontale projectie neder op het horizontale vlak (§ 65), en stelt men uit P, of het nedergeslagen middelpunt, PT = PU = r, loodregt op PN′, dan zal, als men uit T en U, de loodlijnen TT′ en UU′ op MN′ trekt, U′T′ de kleine as van de ellips zijn. Beschrijft men nu eene ellips, die R′S′ en U′T′ tot assen heeft, dan zal deze de gevraagde horizontale projectie wezen. De verticale projectie r″u″s″t″ wordt volmaakt op dezelfde wijze gevonden.

Indien de ellipsen goed geconstrueerd zijn, zullen zij (§ 264) dezelfde verticale raaklijnen V′V″ en W′W″ tot grenzen moeten hebben. Het gedeelte V′R′W′ van de horizontale projectie zal, bij dezen stand des cirkels, behooren bij het gedeelte V″S′W″ van de verticale projectie.

§ 286. Neemt men N′H′ = r, en trekt men H′K′ loodregt op MN′, dan zal H′K′ = P′T′, en dus ook gelijk aan de halve kleine as van de horizontale projectie des cirkels wezen; want trekt men PV loodregt op TT′, dan zijn de driehoeken TPV en N′H′K′ gelijk en gelijkvormig, en dus H′K′ = PV = P′T′. Merkt men nu op, dat MN′P de hoek is, dien de lijn (MN′, M″N) maakt met het horizontale vlak, dan volgt hieruit, dat de halve kleine as van elk der ellipsen gelijk is aan de regthoekszijde eens regthoekigen driehoeks, waarin de overstaande hoek gelijk is aan den standhoek van de as des cirkels met het overeenkomstige projectievlak, en waarin de hypothenusa gelijk aan den straal des cirkels is.

§ 287. Werkstuk. *Te onderzoeken, of eene kromme lijn, die door hare beide projectiën gegeven is, eene vlakke kromme lijn, dan wel eene kromme lijn van dubbele kromming is.*

Men neme in de gegevene kromme lijn drie willekeurige punten aan, die niet in eene zelfde regte lijn liggen, en brenge door deze drie punten een plat vlak (§ 114). Daarna onderzoeke men, of de andere punten der kromme al of niet in dit vlak gelegen zijn. Zoodra men slechts één punt vindt, dat niet in dit vlak ligt, blijkt daaruit, dat de kromme van dubbele kromming is.

§ 288. Werkstuk. *Eene vlakke kromme lijn, die door hare beide projectiën gegeven is, in hare ware gedaante voor te stellen.*

Men construere het vlak, waarin de kromme lijn gelegen is (§ 114), en sla hetzelve met alle punten der kromme lijn op een der projectievlakken neder (§ 92). De behoorlijke vereeniging dezer nedergeslagene punten zal de begeerde ware gedaante der kromme lijn opleveren.

OVER DE WORDING EN CONSTRUCTIE DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

§ 289. Een oppervlak is bepaald, of beschrijvenderwijze voorgesteld, wanneer door middel der projectievlakken elk van deszelfs punten kan aangewezen worden. Bij het voorstellen van lijnen, wordt elk van derzelver punten door zijne beide projectiën aangewezen. Wilde men deze handelwijze ook bij de oppervlakken volgen, dan zou men niet alleen elk punt moeten projecteren, maar men zou ook zijne beide projectiën door eene regte lijn met elkander moeten verbinden, om dezelve niet met andere te verwisselen. Daardoor zou men echter de teekening met een oneindig aantal lijnen overladen, die slechts verwarring zouden veroorzaken, en niet geschikt zouden wezen, om naauwkeurige voorstellingen op te leveren. Ook is werkelijk het platte vlak, als het eenvoudigste oppervlak, niet door de projectiën van al deszelfs punten, maar door de projectiën van twee in hetzelve gelegene lijnen voorgesteld geworden (§ 19), en het komt er nu op aan, om op eene dergelijke wijze de gebogene oppervlakken voor te stellen.

§ 290. Tot zulk eene voorstellingswijze zal men ligtelijk geraken, door na te gaan, hoe de oppervlakken in het algemeen ontstaan kunnen. Elk oppervlak kan namelijk beschouwd worden, als door de beweging eener regte of kromme lijn te zijn voortgekomen. Zoo zal b.v. het platte vlak ontstaan, wanneer eene regte lijn, altijd evenwijdig aan zich zelve blijvende, over eene andere regte lijn heen glijdt; of ook door de beweging eener regte lijn langs twee andere regte lijnen, die elkander snijden of evenwijdig zijn; of ook, wanneer eene regte lijn, altijd door een standvastig punt gaande, zich over eene andere regte lijn heen beweegt.

Op eene dergelijke wijze kan men zich elk gebogen oppervlak door de beweging eener regte of kromme lijn ontstaan denken. Zoo wordt b. v. het oppervlak eens bols voortgebragt door den omtrek eens cirkels, welke om eene zijner middellijnen wentelt; of ook door een' cirkel, welke een' anderen cirkel loodregt snijdt, zich in dien stand beweegt, en daarbij zijne middellijn zoodanig verandert, dat deze steeds de doorsnede van beide cirkelvlakken is. Het oppervlak van eenen cirkelvormigen cilinder ontstaat, wanneer eene regte lijn langs den omtrek eens cirkels, met welks vlak zij eenen hoek maakt, zich zoodanig beweegt, dat zij altijd evenwijdig aan zich zelve blijft. Dit oppervlak kan echter ook beschouwd worden, als door den cirkel te zijn voortgebragt, wanneer hij zich namelijk langs die regte lijn zoodanig beweegt, dat hij evenwijdig aan zich zelven blijft, en zijn middelpunt eene regte lijn doorloopt.

Eene lijn, welke door hare beweging eenig oppervlak voortbrengt, wordt de *beschrijvende lijn* dezes oppervlaks genoemd.

§ 291. Deze weinige voorbeelden zullen genoegzaam zijn, om zich een denkbeeld te vormen van de wording der gebogene oppervlakken, en om tevens te doen inzien, dat een zelfde gebogen oppervlak op verschillende wijzen kan worden voortgebragt, en dat daarbij, òf de beschrijvende lijn zelve, òf haar stand, òf beide te gelijk veranderlijk zijn kunnen. Zoo verandert b.v. in de eerste der opgegevene wordingswijzen van het oppervlak eens bols, de beschrijvende lijn alleen van stand; maar bij de tweede wordingswijze verandert zij te gelijkertijd van stand en grootte. Op welke wijze echter een oppervlak ook moge geboren worden, is het klaar, dat, ter bepaling dezes oppervlaks, altijd de beschrijvende lijn, de wet harer beweging, en zoo die verandert, de wet dezer verandering moeten gegeven zijn. Verbeeldt men zich b.v., dat door eenig willekeurig punt *a* eene verticale lijn getrokken is, waarop zich het middelpunt van eenen cirkel beweegt, die altijd horizontaal blijft, terwijl de straal des cirkels, gedurende deze beweging, altijd gelijk is aan den afstand van het middelpunt tot het punt *a*, dan ziet men gemakkelijk in, dat deze cirkel het oppervlak eens regten kegels voortbrengt, en dat de wording van dit oppervlak door de volgende voorwaarden bepaald wordt: 1°. dat de cirkel of de beschrijvende lijn horizontaal zij; 2°. dat zijn middelpunt in de regte lijn blijve; 3°. dat de straal altijd gelijk zij aan den afstand des middelpunts tot een zeker punt *a*. Hier veranderen derhalve de stand en de grootte der beschrijvende lijn, en beide volgens zekere wetten.

De wet, volgens welke de beschrijvende lijn zich beweegt, wordt meestal daardoor uitgedrukt, dat deze lijn eenen bepaalden stand ten opzigte van andere bekende lijnen hebben moet; deze lijnen worden *rigtlijnen* genoemd. Zoo is b.v., bij de eerste wordingswijze van het oppervlak eens cirkelvormigen cilinders (§ 290), de cirkel, en bij de tweede, de regte lijn de rigtlijn. Deze lijn wijst dus, als het ware, den weg aan, dien de beschrijvende lijn gedurende hare beweging te volgen hebbe. Zij geeft daarenboven somtijds ook nog de wet aan van de veranderlijkheid der beschrijvende lijn. In de tweede wordingswijze van het oppervlak eens bols (§ 290) b.v. is de cirkel, welke den beschrijvenden cirkel loodregt doorsnijdt, de rigtlijn, en geeft te gelijkertijd de maat van veranderlijkheid der middellijn van den beschrijvenden cirkel daardoor aan, dat deze middellijn steeds de doorsnede van beide cirkels zijn moet.

Somtijds bedient men zich ook van een plat of gebogen vlak, in plaats van eene lijn, om de beweging eener beschrijvende lijn te bepalen; zulke vlakken worden alsdan *rigtvlakken* genoemd.

§ 292. Uit de voorgaande beschouwingen van de wording der gebogene oppervlakken blijkt nu, dat zij op eene dergelijke wijze als de platte vlakken, dat is alleen door lijnen, kunnen voorgesteld worden. Men geeft namelijk de projectiën van de rigtlijn en van de beschrijvende lijn; van deze laatste construeert men dan vervolgens nog zooveel andere standen, als tot nadere kennis van het oppervlak dienstig zijn. Men stelt derhalve slechts enkele elementen van het oppervlak voor, wanneer men namelijk onder een element eenen bijzonderen stand van de beschrijvende lijn verstaat; maar men wijst door de rigtlijn en de gegevene wordingswijze

van het gebogen oppervlak, de orde aan, waarin de overige elementen op elkander volgen, en tevens, hoe elke begeerde bijzondere stand van de beschrijvende lijn kan bepaald worden. Onder deze standen zijn er eenige, welker projectiën vooral geschikt zijn, om de gedaante en den stand van het oppervlak te doen inzien, en welke men derhalve gewoonlijk aanwijst. Dit zijn klaarblijkelijk die standen, welke door hunne projectiën, als het ware, de grenzen der projectiën van het voorgestelde oppervlak vormen; of, met andere woorden, welker projectiën op een der projectievlakken de projectiën van alle overige standen der beschrijvende lijn insluiten.

Thans gaan wij over tot het beschouwen van de wording van eenige bijzondere geslachten van gebogene oppervlakken.

OVER DE CILINDERVLAKKEN.

§ 293. Zoodanige gebogene oppervlakken, welke ontstaan door de beweging eener regte lijn, die altijd evenwijdig aan zich zelve of aan eene gegevene rigting blijft, en gedurende hare beweging langs eene gegevene kromme lijn loopt, worden *cilindervlakken* genoemd. De regte lijn is alsdan de beschrijvende lijn, en de kromme lijn is de rigtlijn van het cilindervlak. Beide kunnen echter met elkander verwisseld worden; want hetzelfde cilindervlak zal ook ontstaan, door de kromme lijn zoodanig te laten bewegen, dat, terwijl zij altijd met een zelfde punt op de regte lijn rust, alle hare overige punten lijnen beschrijven, die evenwijdig zijn met deze regte lijn. De eerste wordingswijze der cilindervlakken, door de beweging der regte lijn, is die, waaronder men deze oppervlakken gewoonlijk beschouwt. Bij beide wordingswijzen behoudt overigens de bechrijvende lijn steeds hare gedaante; zij verandert alleenlijk van stand in de ruimte.

§ 294. Uit het bovengezegde blijkt, dat er zoo veel soorten van cilindervlakken bestaan, als er verschillende rigtlijnen kunnen worden aangenomen, om de beweging der regte beschrijvende lijn te bepalen; en dat men met eene zelfde rigtlijn wederom oneindig veel verscheidenheden van cilindervlakken kan vormen, naarmate van de verschillende helling, welke men aan de regte beschrijvende lijn geeft.

Eene, voor de beschrijvende meetkunst, zeer belangrijke klasse van cilindervlakken zijn de projecterende vlakken der kromme lijnen (§ 12). Dit zijn cilindervlakken, welke de projectiën der kromme lijnen tot rigtlijnen hebben, en welker beschrijvende lijnen loodregt zijn op de vlakken van projectie.

Wanneer de rigtlijn eens cilindervlaks eene vlakke kromme lijn is, wordt deze gewoonlijk deszelfs *basis* of *grondlijn* genoemd. Naargelang deze basis een cirkel, eene ellips, eene parabool enz. is, verkrijgt het vlak den naam van cirkelvormig, elliptisch, parabolisch cilindervlak enz. Voorts zijn de cilindervlakken *regt* of *scheef*, naarmate de regte beschrijvende lijn loodregt of schuins op het vlak der grondlijn staat.

Elken bijzonderen stand van de beschrijvende lijn noemt men in de mechanische kunsten eene ribbe van het cilindervlak.

Men kan de cilindervlakken beschouwen als oppervlakken van prisma's van een oneindig aantal zijvlakken, of liever als de grens der oppervlakken

van alle prisma's, welker grondlijnen om- of ingeschrevene veelhoeken van de basis des cilindervlaks zijn.

§ 295. Uit de opgegevene wording der cilindervlakken blijkt ten duidelijkste, dat als men een cilindervlak door willekeurige, en dus ook door verticale vlakken snijdt, welke evenwijdig zijn aan de rigting der beschrijvende lijn, de doorsneden dezer vlakken met het cilindervlak niet anders dan standen der beschrijvende lijn, en dus regte lijnen zullen wezen.

Wordt een cilindervlak door evenwijdige vlakken gesneden, die niet door de beschrijvende lijnen gaan, dan zijn de doorsneden gelijk en gelijkvormig.

§ 296. Werkstuk. *Van een cilindervlak de rigtlijn en de beschrijvende lijn door hare projectiën gegeven zijnde, vraagt men het cilindervlak, benevens deszelfs doorgangen met de vlakken van projectie te construeren.*

Laat (A'B'C'D', A''B''C''D'') (fig. 123) de rigtlijn, en (T'U', T''U'') de lijn wezen, waaraan de beschrijvende lijn steeds evenwijdig moet blijven, dan construeert men, om de grenzen van de projectiën des oppervlaks te bekomen, de beschrijvende lijnen, die door de uiterste punten der rigtlijn gaan, dat is, wat de horizontale projectie betreft, de beschrijvende lijnen, die door A en C gaan, en wat de verticale projectie aangaat, de beschrijvende lijnen, die door B en D gaan. De beide eerste dezer punten zijn gemakkelijk te kennen uit hunne horizontale projectiën A' en C'; de beide andere worden bepaald, door aan de verticale projectie der rigtlijn raaklijnen B''*M* en D''*O* te trekken, die evenwijdig zijn aan de verticale projectie T''U'' van de gegevene rigting der beschrijvende lijn. Deze raaklijnen zijn te gelijker tijd de verticale projectiën der beschrijvende lijn in haren hoogsten en laagsten stand, en sluiten derhalve de geheele verticale projectie des oppervlaks in; de horizontale projectiën B'*K* en D'*I* dezer beschrijvende lijnen worden gevonden, wanneer men door de horizontale projectiën der punten B en D lijnen evenwijdig trekt aan de horizontale projectie T'U' van de rigting der beschrijvende lijn. Evenzoo zijn de lijnen A'*G* en C'*H*, die door de uiterste punten A' en C' van de horizontale projectie der rigtlijn, evenwijdig aan T'U' getrokken worden, de projectiën van de beide uiterste standen der beschrijvende lijn, ten opzigte van het horizontale vlak; deze sluiten derhalve de horizontale projectie des oppervlaks in. De verticale projectiën dezer lijnen worden verkregen, wanneer men door de verticale projectiën A'' en C'', van de punten A en C der rigtlijn, de lijnen A''*L* en C''*N* evenwijdig aan T''U'' trekt.

Deze vier uiterste standen (A'*G*, A''*L*), (B'*K*, *M*B''), (C'*H*, *N*C'') en (D'*I*, *O*D'') van de beschrijvende lijn zijn, door middel van hunne projectiën, genoegzaam, om het geheele cilindervlak voor te stellen, dewijl zij de grenzen der projectiën aanwijzen; meestal worden daartoe zelfs alleen de lijnen A'*G*, C'*H* en *O*D'', *M*B'' gebezigd. Wil men overigens nog meer standen van de beschrijvende lijn projecteren, dan behoeft men slechts, door elk der projectiën van een zelfde punt der rigtlijn, lijnen evenwijdig te trekken met de overeenkomstige projectiën van de rigting der beschrijvende lijn.

De doorgangen van het cilindervlak zijn niet anders dan de behoorlijke verbinding van eene reeks van punten, waarin de projectievlakken door de beschrijvende lijn in hare verschillende standen gesneden worden. Om

dezelve derhalve te bekomen, behoeft men slechts (§ 56) de punten L′, M′, N′, enz., G″, K″, H″, enz. te bepalen, waar verschillende standen LG, MK, NH, enz. van de beschrijvende lijn de projectievlakken snijden. Door de vereeniging van een genoegzaam aantal van zulke snijpunten in elk projectievlak, verkrijgt men de doorgangen L′M′N′P′O′ en G″K″H″F″ van het cilindervlak.

Neemt men den horizontalen doorgang tot rigtlijn aan, of liever neemt men de rigtlijn in het horizontale vlak aan, zoo als eenvoudigheidshalve gewoonlijk geschiedt, wanneer de rigtlijn eene vlakke kromme lijn is, dan kan men zich een duidelijker denkbeeld vormen van de gedaante en den stand van het cilindervlak, dan wanneer de rigtlijn niet in een der projectievlakken ligt. De doorgangen dragen in het algemeen veel bij tot verzinnelijking der gebogene oppervlakken in de ruimte.

Ofschoon men hier aan de vlakke kromme lijn, die tot rigtlijn van het cilindervlak genomen is, eenen bijzonderen stand gegeven heeft, is het klaar, dat de constructie op eene dergelijke wijze kan geschieden, wanneer men aan die kromme eenen anderen stand geeft, of wel eene kromme lijn van dubbele kromming tot rigtlijn neemt, mits daarbij in het oog houdende, wat in § 266 is opgemerkt, wanneer de projectiën der kromme lijn beide gesloten kromme lijnen zijn.

§ 297. Wat de uitvoering der teekening betreft, ziet men gemakkelijk in, dat het gedeelte L′O′P′N′ (fig. 123) van den horizontalen doorgang, en het overeenkomstige gedeelte des oppervlaks, gevolgelijk alle standen der beschrijvende lijn, die uit den boog L′O′P′N′ voortkomen, in de horizontale projectie zigtbaar zijn. Daarentegen zullen de elementen des oppervlaks, welke uit den boog L′M′N′ voortkomen, met betrekking tot het horizontale vlak, onzigtbaar wezen, dewijl zij door het eerstgenoemde deel des oppervlaks bedekt worden. In de verticale projectie zal men klaarblijkelijk de projectiën van die standen der beschrijvende lijn zien, welke uit den boog O′P′N′M′ voortkomen, terwijl daarentegen die onzigtbaar zijn, welke den boog O′L′M′ tot rigtlijn hebben. Dit alles zal men gemakkelijker begrijpen, wanneer men zich het oppervlak werkelijk in de ruimte voorstelt, door zich het verticale vlak van projectie om de as van projectie loodregt op het horizontale vlak opgeslagen te denken, en vervolgens zich te verbeelden, dat men het oppervlak regt van boven op het horizontale vlak, en van voren in loodregten stand op het verticale vlak beschouwt. Het is vooral van belang, de projectiën van de zigtbare deelen van voorgestelde voorwerpen, en in het bijzonder van gebogene oppervlakken, van die der onzigtbare te onderscheiden. Daartoe moet men zich van deze zaken een duidelijk denkbeeld vormen, en dit kan, door middel van de doorgangen der gebogene oppervlakken, of door zich het voor te stellene voorwerp in de ruimte te verzinnelijken, zonder zwarigheden geschieden.

§ 298. Werkstuk. *De horizontale projectie van eenig punt eens cilindervlaks gegeven zijnde, deszelfs verticale projectie te bepalen.*

De horizontale projectie van eenig punt eens cilindervlaks kan niet willekeurig worden aangenomen, maar moet gelegen wezen tusschen de raaklijnen, die, evenwijdig aan de horizontale projectie van de rigting der beschrijvende lijn, aan de horizontale projectie der rigtlijn kunnen

getrokken worden. De lijn, die men door de gegevene horizontale projectie eens punts evenwijdig aan de horizontale projectie van de rigting der beschrijvende lijn trekt, zal de horizontale projectie wezen van de beschrijvende lijn, waarop dit punt gelegen is; bepaalt men nu de verticale projectiën van de punten, waarin deze horizontale projectie die de rigtlijn snijdt, dan zal men op dezelfde wijze de verticale projectie deze beschrijvende lijn kunnen construeren; het punt waarin deze verticale projectie gesneden wordt door de loodlijn, die uit de gegevene horizontale projectie door de as gaat, zal de begeerde verticale projectie aanwijzen.

Laat b. v. (A'B'C'D', A''B''C''D'') (fig. 123) de rigtlijn, en (T'U', T''U'') de rigting van de beschrijvende lijn zijn, dan zal men (§ 296) als horizontale projectiën van punten dezes cilindervlaks, slechts die punten kunnen aannemen, welke begrepen zijn tusschen de onbepaalde evenwijdige lijnen A'*G* en C'*H*. Zij nu S' de gegevene horizontale projectie van eenig punt S des cilindervlaks, dan is de lijn S'*F*, die door S' evenwijdig aan de horizontale projectie T'U' van de rigting der beschrijvende lijn getrokken wordt, de horizontale projectie van die standen der beschrijvende lijn, waarop het punt S des cilindervlaks gelegen is. Er zijn klaarblijkelijk in dit geval twee zulke standen; want het punt E', waarin S'*F* de horizontale projectie der rigtlijn snijdt, is de horizontale projectie van twee punten E en e der rigtlijn, die E'' en e'' tot verticale projectiën hebben. Trekt men dus door E'' en e'' de lijnen E''*P* en e''*Q* evenwijdig aan de verticale projectie T''U'' van de rigting der beschrijvende lijn, dan kan in elk dezer lijnen de begeerde verticale projectie van het punt S gelegen wezen. Dewijl zij nu ook in de loodlijn moet liggen, die uit S' door de as gaat, zoo is zij een der twee punten S'', waarin deze loodlijn de projectiën E''*P* en e''*Q* snijdt. Er zijn derhalve in dit geval twee punten op het cilindervlak, welker horizontale projectiën in het punt S' vallen. Dit heeft klaarblijkelijk eveneens plaats met alle punten dezes cilindervlaks, welker projectiën niet in de grenzen van deszelfs projectiën vallen. Was omgekeerd de verticale projectie van eenig punt dezes oppervlaks gegeven, dan zou men onder dezelfde voorwaarden twee horizontale projectiën vinden. Elk dezer aangenomene verticale projectiën van eenig punt des cilindervlaks moet weder, volgens § 296, gelegen zijn tusschen de onbepaalde evenwijdige lijnen *O*D'' en *M*B''.

§ 299. Is de rigtlijn L'O'P'N'M' (fig. 123) van het cilindervlak in het horizontale vlak gegeven, en (T'U', T''U'') de rigting der beschrijvende lijn, dan zal, als S' de horizontale projectie van eenig punt des cilindervlaks is, waarvan men de verticale projectie wil bepalen, de lijn S'*F*, die door S' evenwijdig aan T'U' getrokken is, weder de horizontale projectie der beschrijvende lijnen aanwijzen, waarop het punt S moet gelegen wezen. De punten P' en Q', waarin S'*F* de rigtlijn snijdt, zijn punten dezer beschrijvende lijnen, en daar deze punten, als in het horizontale vlak gelegen, *P* en *Q* tot verticale projectiën hebben, zoo zijn *P*F'' en *Q*R'', die evenwijdig aan T''U'' getrokken zijn, de verticale projectiën der beschrijvende lijnen op het cilindervlak, die beide S'*F* tot horizontale projectie hebben. Trekt men dus uit S' eene loodlijn door de as, dan zijn de punten S'', waarin deze loodlijn de verticale projectiën *P*F'' en *Q*R'' snijdt, de begeerde verticale projectiën.

Het is klaar, dat de rigtlijn eens cilindervlaks zoodanig wezen kan, dat met eene aangenomene horizontale projectie van eenig punt des oppervlaks drie, vier en meer verticale projectiën kunnen overeenstemmen, en zoo ook omgekeerd.

§ 300. Wanneer de rigtlijn van een cilindervlak in het horizontale vlak gegeven is, dan zullen de uiterste raaklijnen, die, evenwijdig met de horizontale projectie van de rigting der beschrijvende lijn, aan de rigtlijn worden getrokken, de grenzen van de horizontale projectie des cilindervlaks bepalen. Trekt men aan de rigtlijn de uiterste raaklijnen, die loodregt staan op de as van projectie, dan zal daardoor de verticale projectie van de rigtlijn bepaald worden; trekt men dus uit de uiteinden dezer projectie, of uit de punten, waar genoemde raaklijnen de as van projectie ontmoeten, lijnen evenwijdig met de verticale projectie van de rigting der beschrijvende lijn, dan zullen deze evenwijdige lijnen de grenzen van de verticale projectie des cilindervlaks aantoonen.

OVER DE KEGELVLAKKEN.

§ 301. *Kegelvlakken* zijn zulke oppervlakken, die voortgebragt worden door eene onbepaalde regte lijn, welke altijd door een gegeven vast punt gaat, en langs den omtrek van eene gegevene kromme lijn henen glijdt. Deze kromme lijn wordt de *rigtlijn*, en het vaste punt de *top* des kegelvlaks genoemd, ofschoon het gepaster ware, dit punt het middelpunt des kegelvlaks te noemen.

Men kan de kegelvlakken, even als de cilindervlakken, ook op eene andere wijze gevormd denken, welke wij hier, eenvoudigheidshalve, alleenlijk op die met cirkelvormige rigtlijnen willen toepassen. Deze vlakken kunnen namelijk beschouwd worden, als voortgebragt te zijn door eenen cirkel, welke zich zoodanig beweegt, dat, terwijl zijn middelpunt altijd in de lijn blijft, die naar den top des oppervlaks gerigt is, zijn straal op elk oogenblik der beweging evenredig is aan den afstand van zijn middelpunt tot den top des oppervlaks.

Het is klaar, dat terwijl het vlak des cirkels tot den top des oppervlaks nadert, de straal dezes cirkels moet afnemen, en nul zal worden, zoodra het vlak des cirkels door den top gaat, en dat deze straal zijne rigting zal veranderen, om vervolgens weder onbepaaldelijk aan te groeijen, wanneer het vlak des cirkels, na door den top gegaan te zijn, zich meer en meer van denzelven verwijdert.

Bij deze tweede wordingswijze, verandert de cirkel, welke nu de beschrijvende lijn is, niet alleen van stelling, maar ook van gedaante, dewijl deszelfs straal verandert, en gevolgelijk ook deszelfs kromming en uitgebreidheid.

§ 302. De top vereenigt twee volmaakt gelijke deelen eens kegelvlaks, welke te zamen echter slechts een en hetzelfde oppervlak uitmaken. Elk dezer deelen wordt een *blad des oppervlaks* genoemd. Het is ten deze eene algemeene grondstelling, dat men, als tot een en hetzelfde oppervlak behoorende, alle zoodanige deelen te beschouwen heeft, welke door eene zelfde beweging, of door eene zelfde lijn, in derzelver geheele uitgetrektheid, kunnen gevormd worden, en men noemt in het algemeen,

elk zoodanig deel een *blad* dezes oppervlaks. De verdeeling van een oppervlak in bladen, is geheel overeenkomstig met de verdeeling der krommme lijnen in takken.

§ 303. Het geslacht der cilindervlakken kan beschouwd worden als in dat der kegelvlakken begrepen te wezen. Om dit in te zien, denke men zich de rigtlijn eens kegelvlaks in eene onveranderlijke stelling, en neme men aan, dat de top des oppervlaks, waarin alle regte beschrijvende lijnen te zamen komen, zich op eenen oneindigen afstand van deze rigtlijn bevinde, dan zullen alle regte beschrijvende lijnen eenen onderling evenwijdigen stand aannemen, en het oppervlak zal in dat van eenen cilinder overgaan.

Wegens deze overeenkomst der beide geslachten van oppervlakken, gebruikt men ook bij beide dezelfde benamingen: zoo geeft men aan de *vlakke* rigtlijn den naam van *basis* of grondlijn, en aan elken bijzonderen stand der regte beschrijvende lijn, dien van *ribbe* des kegelvlaks, enz.

Het eenvoudigste onder alle kegelvlakken is dat van eenen *regten cirkelvormigen kegel*. Dit oppervlak heeft een' cirkel tot basis, en dezelfs top ligt in de as dezes cirkels, welke tevens de as des kegels is.

Het oppervlak van den *scheeven cirkelvormigen kegel* heeft eenen cirkel tot basis; maar de regte lijn, die uit het middelpunt der basis tot den top des oppervlaks getrokken wordt, staat niet loodregt op het vlak dezer basis.

Men kan de kegelvlakken beschouwen als de grenzen van de oppervlakken der piramiden, welker gemeenschappelijk toppunt in dat des kegelvlaks ligt, en welker grondlijnen in- of omgeschrevene veelhoeken van de grondlijn des kegelvlaks zijn.

§ 304. Uit de opgegevene wording der kegelvlakken blijkt ten duidelijkste, dat als men een kegelvlak door willekeurige, en dus ook door verticale vlakken snijdt, welke door den top gaan, de doorsneden dezer vlakken met het kegelvlak niets anders, dan standen der beschrijvende lijn, en dus regte lijnen zullen wezen.

Wordt een kegelvlak door evenwijdige vlakken gesneden, dan zullen de doorsneden gelijkvormig zijn.

§ 305. Werkstuk. *Van een kegelvlak, de rigtlijn en de top door hunne beide projectiën, gegeven zijnde, vraagt men het kegelvlak, benevens dezelfs doorgang met het horizontale vlak, te construeren.*

Laat (A′B′C′D′, A″B″C″D″) (fig. 124) de rigtlijn, en (F′, F″) de top zijn van het kegelvlak, dan is eene lijn EF, welke door den top F en een punt E der rigtlijn gaat, een der standen van de beschrijvende lijn; deszelfs projectiën zijn F′E′ en F″E″. Met betrekking tot het verticale vlak, zijn de lijnen F″*G* en F″*I*, die uit F″ door A″ en C″ getrokken zijn, de verticale projectiën van de uiterste elementen des kegelvlaks; de horizontale projectiën dezer beschrijvende lijnen zijn F′A′ en F′C′. Wat het horizontale vlak betreft, zijn F′B′ en F′D′, of de raaklijnen, die uit F′ aan A′B′C′D′ kunnen getrokken worden, de horizontale projectiën van de uiterste standen der beschrijvende lijn; derzelver verticale projectiën zijn de lijnen, die uit F″ naar B″ en D″ zijn getrokken. Deze vier projectiën F″*G*, F″*I*, F′B′ en F′D′ vormen de grenzen der projectiën van het kegelvlak. Hieruit blijkt tevens ten duidelijkste, hoe men nog meer standen van de beschrijvende lijn kan projecteren.

Om den horizontalen doorgang des kegelvlaks te verkrijgen, behoeft men slechts de punten G′, H′, I′, L′, K′, enz., waar een genoegzaam aantal beschrijvende lijnen het horizontale vlak snijdt, behoorlijk met elkander te vereenigen.

Ook bij de kegelvlakken, wordt de rigtlijn, wanneer zij eene vlakke kromme lijn is, gemakshalve gewoonlijk in het horizontale vlak aangenomen, en zij is dan, even als bij de cilindervlakken, te gelijkertijd de doorgang des oppervlaks met het horizontale vlak.

Verder vindt al hetgeen, wat in § 297 over de uitvoering der teekening gezegd is, ook hier zijne toepassing.

§ 306. Werkstuk. *De horizontale projectie van eenig punt eens kegelvlaks gegeven zijnde, deszelfs verticale projectie te bepalen.*

De horizontale projectie van eenig punt eens kegelvlaks moet gelegen wezen tusschen de onbepaalde raaklijnen, die uit de horizontale projectie van den top aan de horizontale projectie van de rigtlijn kunnen getrokken worden. De lijn, die men door de horizontale projectie van den top en de gegevene horizontale projectie eens punts trekt, zal de horizontale projectie wezen van de beschrijvende lijn, waarop dit punt gelegen is; bepaalt men nu de verticale projectiën van de punten, waarin deze horizontale projectie die der rigtlijn snijdt, dan zal men op dezelfde wijze de verticale projectie dezer beschrijvende lijn kunnen construeren; het punt, waarin deze verticale projectie gesneden wordt door de loodlijn, die uit de gegevene horizontale projectie door de as gaat, zal de begeerde verticale projectie aanwijzen.

Zij b. v. (A′B′C′D′, A″B″C″D″) (fig. 124) de rigtlijn, en (F′, F″) de top van het kegelvlak, dan zijn, volgens de vorige §, al de punten, gelegen binnen den hoek D′F′B′, horizontale projectiën van het benedenste blad des kegelvlaks, terwijl al de punten, gelegen binnen den overstaanden hoek, dien men verkrijgt, door de raaklijnen B′F′ en D′F′ uit het punt F′ te verlengen, horizontale projectiën van het bovenste blad zullen wezen. Laat nu M′ de gegevene horizontale projectie zijn, dan is F′M′ de horizontale projectie van al de standen der beschrijvende lijn, waarop het punt M des kegelvlaks gelegen is. Er zijn klaarblijkelijk in dit geval twee zulke standen; want de horizontale projectie F′M′ snijdt de horizontale projectie der rigtlijn in twee punten E′ en e′, waarbij de verticale projectiën E″ en e″ behooren. Trekt men dus de lijnen F″E″ en F″e″, dan kan in elk dezer lijnen de begeerde verticale projectie van het punt M gelegen wezen. Dewijl zij nu ook in de loodlijn moet liggen, die uit M′ door de as gaat, zoo is zij een der twee punten M″, waarin deze loodlijn de projectiën F″E″ en F″e″ snijdt.

Was omgekeerd de verticale projectie van eenig punt dezes oppervlaks gegeven, dan zou men op eene dergelijke wijze deszelfs horizontale projectie kunnen bepalen. Elk dezer aangenomene verticale projectiën van eenig punt des kegelvlaks, moet weder gelegen zijn tusschen de onbepaalde raaklijnen F″*G* en F″*I*.

§ 307. Is de rigtlijn G′H′I′K′ (fig. 124) in het horizontale vlak gegeven, en (F′, F″) de top des kegelvlaks, dan zal, als M′ de horizontale projectie van eenig punt des kegelvlaks is, waarvan men de verticale projectie wil bepalen, de lijn M′F′ weder de horizontale projectie der beschrijvende

lijnen aanwijzen, waarop het punt M moet gelegen wezen. De punten L′ en N′, waarin N′F′ alsdan de rigtlijn snijdt, zijn punten dezer beschrijvende lijnen, en daar deze punten, als in het horizontale vlak gelegen, *L* en *N* tot verticale projectie hebben, zoo zijn *LF″* en *NF″* de verticale projectiën der beschrijvende lijnen op het kegelvlak, die beide M′F′ tot horizontale projectie hebben. Trekt men dus uit M′ eene loodlijn door de as, dan zijn de punten M″, waarin deze loodlijn de verticale projectiën *LF″* en *NF″* snijdt, de begeerde verticale projectiën.

Hier geldt weder dezelfde aanmerking, als in het slot van § 299.

§ 308. Wanneer de rigtlijn van een kegelvlak in het horizontale vlak gegeven is, dan zullen de uiterste raaklijnen, die uit de horizontale projectie van den top, aan de rigtlijn worden getrokken, de grenzen van de horizontale projectie des kegelvlaks bepalen. Trekt men aan de rigtlijn de uiterste raaklijnen, die loodregt staan op de as van projectie, dan zal daardoor de verticale projectie van de rigtlijn bepaald worden; vereenigt men dus de uiteinden dezer projectie, of de punten, waar genoemde raaklijnen de as van projectie ontmoeten, met de verticale projectie van den top, dan zullen deze lijnen de verticale projectie des kegelvlaks aantoonen.

Ligt de rigtlijn eens kegelvlaks in het horizontale vlak, en valt de horizontale projectie van den top binnen de rigtlijn, dan bestaat er geene grens voor de horizontale projectie des kegelvlaks. Valt de horizontale projectie van den top op de rigtlijn, dan is de horizontale projectie des kegelvlaks in zoo verre onbegrensd, dat zij niet kan genomen worden op de raaklijn, die in de horizontale projectie van den top aan de rigtlijn kan worden getrokken.

---

§ 309. Wanneer men zich door eenig vast punt eene regte lijn denkt, die zich zoodanig beweegt, dat zij gedurende deze beweging steeds een gebogen oppervlak, b. v. dat eens bols, aanraakt, dan zal zij een kegelvlak voortbrengen, hetwelk het gebogen oppervlak geheel omvat en aanraakt. Beweegt zich de regte lijn steeds evenwijdig met eene andere regte lijn, en rust zij tevens altijd op een gebogen oppervlak, dan brengt zij een cilindervlak voort, door hetwelk dat gebogen oppervlak omvat en aangeraakt wordt. Zoodanige oppervlakken, welke door eene regte lijn geboren worden, en een ander oppervlak omhullen en aanraken, worden *omhullingsvlakken* genoemd.

§ 310. De vereeniging van al de punten, waarin de regte lijn, die het omhullingsvlak voortbrengt, het omhulde oppervlak aanraakt, vormt blijkbaar op dit oppervlak eene kromme lijn, en het is klaar, dat om zulke omhullingsvlakken te beschrijven, het alleenlijk op het bepalen dezer aanrakingskromme zal aankomen, dewijl deze niet anders is, dan de rigtlijn van een kegel- of cilindervlak, die wij reeds hebben leeren beschrijven. Op welke wijze men deze aanrakingskromme bepaalt, zal later worden aangetoond; alleenlijk wordt hier nog opgemerkt, dat deze omhullingsvlakken voornamelijk bij het bepalen der schaduwen en bij het in perspectief brengen van voorwerpen hunne toepassing vinden.

OVER DE SCHEEVE OPPERVLAKKEN.

§ 311. Men heeft moeten opmerken, dat bij de nu beschouwde cilinder-

en kegelvlakken, elke twee willekeurige, en dus ook elke twee op elkander volgende standen der regte beschrijvende lijn in een zelfde vlak zijn gelegen. Eene regte lijn kan zich echter ook zoodanig bewegen, dat geene twee onmiddellijk op elkander volgende standen derzelve in een zelfde vlak liggen; het gebogen oppervlak, dat alsdan door die regte lijn wordt voortgebragt, wordt een *scheef oppervlak* genoemd.

Alle gebogene oppervlakken, die beschouwd kunnen worden, als door de beweging eener regte lijn te zijn ontstaan, worden in het algemeen *regelregte oppervlakken* genoemd, omdat de kant van een liniaal of regel in al de standen van de beschrijvende lijn op deze oppervlakken kan gepast worden. De cilinder- en kegelvlakken, alsmede de scheeve oppervlakken zijn derhalve regelregte oppervlakken.

§ 312. In het algemeen worden de scheeve oppervlakken geboren door de beweging eener regte lijn, die altijd blijft rusten op drie kromme lijnen, welke niet in een zelfde vlak liggen. Om te bewijzen, dat het oppervlak alsdan geheel en al bepaald is, neme men een willekeurig punt M van de eerste rigtlijn A (fig. 125), en beschouwe dit als den top eens kegelvlaks, voortgebragt door eene regte lijn, die langs de tweede rigtlijn B henen glijdt. Dit kegelvlak zal de derde rigtlijn C in eenig punt P mijden, en de lijn MP, die door de punten M en P gaat, in hare geheele uitgestrektheid op dit kegelvlak liggende, moet de rigtlijn B in eenig punt N ontmoeten; gevolgelijk rust zij op de drie rigtlijnen in de punten M, N en P. Verbeeldt men zich nu, dat al de punten der eerste rigtlijn achtervolgens als toppen van verschillende kegelvlakken worden aangenomen, dan is het klaar, dat de lijn MNP, die de drie rigtlijnen snijdt, onophoudelijk van stand zal veranderen, en een oppervlak zal beschrijven, dat op deze wijze geheel en al bepaald is.

Het zou kunnen gebeuren, dat de drie rigtlijnen op een cilinder- of kegelvlak gelegen waren; alsdan zou de beschrijvende lijn, door langs deze rigtlijnen henen te glijden, deze oppervlakken zelven beschrijven.

§ 313. Niet alleen bij de scheeve oppervlakken, maar bij alle oppervlakken, die door de beweging eener regte lijn ontstaan, moet deze regte beschrijvende lijn in het algemeen aan drie voorwaarden voldoen. Zoo is bij de cilinder- en kegelvlakken, de eerste voorwaarde, dat elke twee op elkander volgende beschrijvende lijnen in een zelfde vlak moeten liggen, terwijl de twee overige voorwaarden zijn, dat de beschrijvende lijn altijd op eene gegevene kromme lijn moet rusten en evenwijdig blijven aan eene bepaalde rigting, om een cilindervlak voort te brengen; of langs eene gegevene kromme lijn moet glijden, en door een gegeven vast punt gaan, om een kegelvlak te beschrijven.

§ 314. Verbeeldt men zich elke twee op elkander volgende standen der beschrijvende lijn van een scheef oppervlak, gesneden door de regte lijn, die loodregt op beide is, dan vormen de voetpunten van al deze loodlijnen op het scheeve oppervlak eene bijzondere kromme lijn, welke men de *intrekkingslijn* (*) kan noemen.

(*) Deze lijn bevat blijkbaar de kortste afstanden van al de beschrijvende lijnen des oppervlaks, zoodat het volgens deze lijn op het naauwste of, als het ware, ingetrokken voorkomt; dit is de reden, waarom men deze lijn aldus genoemd heeft.

§ 315. Wanneer men bovengenoemde drie voorwaarden (§ 312), waaraan eene bewegende regte lijn in het algemeen moet voldoen, om een scheef oppervlak voort te brengen, geheel of gedeeltelijk door andere vervangt: indien men b. v. de regte lijn op twee kromme lijnen en een gebogen oppervlak laat bewegen; of op twee gebogene oppervlakken en eene kromme lijn; of op drie gebogene oppervlakken; of op twee gebogene oppervlakken, terwijl zij eenen gegevenen hoek met een gegeven vlak maakt, dan ontstaat door deze beweging in het algemeen een scheef oppervlak. Er is dus eene oneindige verscheidenheid van scheeve oppervlakken.

§ 316. In plaats van voor de drie rigtlijnen kromme lijnen aan te nemen, kan men voor eene of meer derzelve ook regte lijnen gebruiken. Zoo zal er b. v. een scheef oppervlak ontstaan, wanneer men twee gelijke halve cirkels neemt, die evenwijdig zijn, en loodregt staan op een zelfde vlak, zoodanig, dat de lijn, die hunne middelpunten vereenigt, niet loodregt staat op beide cirkelvlakken; vervolgens door het midden dezer lijn eene loodlijn trekt op beide cirkelvlakken, en deze laatste lijn, alsmede de omtrekken van bovengenoemde cirkels, als rigtlijnen aanneemt. Of ook, als men eenen halven cirkel en een cirkelsegment neemt, die evenwijdig zijn en loodregt staan op een zelfde vlak, zoodanig, dat de lijn, die het middelpunt des halven cirkels en het midden der koorde van het cirkelsegment vereenigt, loodregt zij op beide, en men deze laatste lijn, alsmede de twee cirkelomtrekken als rigtlijnen aanneemt. Deze twee scheeve oppervlakken worden in de bouwkunst somtijds aangewend ter constructie van kleine gewelven. Het eerste is een scheef tongewelf (*biais passé*), het laatste is een zoogenaamde kernboog (*arrière voussure de Marseille*).

Heeft men twee regte cirkelvormige cilinders, die dezelfde as, maar verschillende grondvlakken hebben, en is op elk dezer cilinders, met dezelfde hoogte van eenen schroefgang, doch op verschillende hoogten beginnende, eene schroeflijn beschreven, dan zal eene regte lijn, die altijd op deze schroeflijnen rust, en tevens gedurig door de as van den cilinder gaat, een scheef oppervlak beschrijven, dat den naam draagt van *hellend schroefvlak*.

Het scheeve oppervlak, ontstaande door de beweging eener regte lijn op drie regte lijnen, welke niet evenwijdig zijn aan een zelfde vlak, wordt *hyperboloïde met één blad* genoemd. Zijn deze drie rigtlijnen evenwijdig aan een zelfde vlak, dan ontstaat er een scheef oppervlak, waaraan men den naam van *hyperbolische paraboloïde* geeft.

§ 317. Men kan ook twee rigtlijnen aannemen, en een vlak als rigtvlak, b. v. een der projectievlakken, waaraan de beschrijvende lijn steeds evenwijdig moet blijven. Wanneer in dit geval eene der beide rigtlijnen eene regte lijn is, dan ontstaat er een oppervlak, hetwelk onder den naam van *konoïde* bekend is, dewijl het eenige overeenkomst met den kegel (*conus*) heeft.

Is bij de konoïde de regte rigtlijn loodregt op het rigtvlak, waaraan de beschrijvende lijn evenwijdig moet blijven, dan verkrijgt het oppervlak den naam van *regte konoïde*, en de regte rigtlijn is alsdan te gelijkertijd deszelfs intrekkingslijn. Van dien aard is b. v. het oppervlak van de *kegelvormige wig van* Wallis; hetzelve ontstaat op de volgende wijze: uit eenig punt van de gemeene doorsnede van twee op elkander loodregt staande vlakken is in het eene vlak een cirkel beschreven, en

in het andere vlak is eene lijn getrokken, evenwijdig aan deze gemeene doorsnede; op dien cirkel en op die regte lijn, als rigtlijnen, laat men eene andere regte lijn zoodanig bewegen, dat zij altijd evenwijdig blijft aan een vlak, dat loodregt op de beide eerste vlakken staat. De regte rigtlijn is de intrekkingslijn van dit oppervlak.

Tot het geslacht der regte konoïden behoort ook het oppervlak, dat ontstaat, wanneer men eene regte lijn zoodanig laat bewegen, dat zij 1°. altijd door de as van eenen regten cirkelvormigen cilinder gaat; 2°. steeds evenwijdig blijft aan het grondvlak dezes cilinders, en 3°. gedurig op eene schroeflijn blijft rusten, die op het oppervlak des cilinders beschreven is. Dit scheeve oppervlak, waarvan de as van den cilinder de intrekkingslijn is, draagt in het bijzonder den naam van *horizontaal schroefvlak*. Men ziet hetzelve aangewend bij de archimedische- of waterschroef, alsmede bij de gewone wenteltrappen.

Een paar voorbeelden zal genoegzaam wezen, om te doen inzien, hoe men de scheeve oppervlakken construeert.

§ 318. Werkstuk. *Op twee regte lijnen beweegt zich eene derde regte lijn zoodanig, dat zij steeds evenwijdig blijft met het verticale vlak van projectie: men vraagt het oppervlak te construeren, dat daardoor wordt voortgebragt.*

Omdat de beschrijvende lijnen alle evenwijdig aan het verticale vlak moeten loopen, zal elke lijn, die evenwijdig aan de as van projectie getrokken wordt, de horizontale projectie wezen van eenigen stand der beschrijvende lijn; de punten, waarin deze horizontale projectie die der beide rigtlijnen snijdt, zijn de horizontale projectiën der snijpunten van die beschrijvende lijn met de beide rigtlijnen; bepaalt men dus de beide verticale projectiën dezer snijpunten, dan zal men, door die te vereenigen, de verticale projectie dezer beschrijvende lijn verkrijgen.

Laat b. v. (A′B′, A″B″) en (C′D′, CD'') (fig. 126) de twee gegevene rigtlijnen wezen, dan is E′F′, die evenwijdig aan de as getrokken is, de horizontale projectie van eenigen stand EF der beschrijvende lijn, terwijl E′ en F′ de horizontale projectiën zijn van de punten, waarin deze beschrijvende lijn de beide rigtlijnen snijdt. Daar nu E″ en F″ de verticale projectiën dezer punten zijn, zoo is E″F″ de verticale projectie der beschrijvende lijn EF. Op dezelfde wijze verkrijgt men andere standen (A′C′, A″C), (G′H′, G″H″), enz. van de beschrijvende lijn, en daardoor de begeerde projectiën A′B′D′C′ en A″B″D″C van het scheeve oppervlak, hetwelk dat der hyperbolische paraboloïde is.

Is eene der twee rigtlijnen eene kromme lijn, of zijn de beide rigtlijnen kromme lijnen, dan zal de constructie volmaakt op dezelfde wijze kunnen geschieden.

§ 319. Is van het oppervlak, dat in de vorige § beschouwd is, de horizontale projectie van eenig punt gegeven, en wil men deszelfs verticale projectie bepalen, dan trekt men door de gegevene horizontale projectie eene lijn evenwijdig aan de as, welke lijn de horizontale projectie zal wezen van de beschrijvende lijn, waarop het begeerde punt gelegen is; vervolgens bepaalt men de verticale projectiën van de punten, waarin deze horizontale projectie der beschrijvende lijn die der beide rigtlijnen snijdt; de lijn, die deze twee verticale projectiën vereenigt, is de verticale projectie der beschrijvende lijn, en het punt, waarin de loodlijn, die uit

de gegevene horizontale projectie door de as gaat, deze verticale projectie snijdt, zal de begeerde verticale projectie aanwijzen.

§ 320. Werkstuk. *Drie regte lijnen gegeven zijnde, vraagt men het oppervlak te construeren, hetwelk voortgebragt wordt door eene regte lijn, die altijd op deze drie lijnen blijft rusten.*

Laat men door eene der drie rigtlijnen willekeurige vlakken gaan, en bepaalt men de punten, waarin de beide andere rigtlijnen die vlakken snijden, dan zal men, door die twee snijpunten telkens te vereenigen, verschillende standen van de beschrijvende lijn bekomen, en dus het oppervlak van de hyperboloïde met één blad geconstrueerd hebben.

De constructie wordt zeer eenvoudig, wanneer eene der drie rigtlijnen loodregt staat op een der projectievlakken, waartoe men, indien de drie rigtlijnen willekeurig zijn gegeven, door toepassing van vorige werkstukken, altijd zal kunnen geraken. Laat b. v. NN'' (fig. 127) de rigtlijn zijn, die loodregt staat op het horizontale vlak; zijn nu ($A'B'$, $A''B$) en ($C'D'$, CD'') de beide andere rigtlijnen, dan zal elke lijn, die door N wordt getrokken, de horizontale doorgang wezen van een verticaal vlak, dat door NN'' gaat; de punten, waarin deze horizontale doorgang de horizontale projectiën der beide andere rigtlijnen snijdt, zijn de horizontale projectiën der snijpunten van dit verticale vlak met de beide andere rigtlijnen, en deszelfs horizontale doorgang is dus te gelijkertijd de horizontale projectie van eenigen stand der beschrijvende lijn; bepaalt men nu de beide verticale projectiën dezer snijpunten, dan zal men, door deze te vereenigen, de verticale projectie dezer beschrijvende lijn bekomen. Zoo is b.v. NF'' de horizontale doorgang van een verticaal vlak, dat door NN'' gaat, en dat de beide andere rigtlijnen in twee punten snijdt, waarvan E' en F' de horizontale projectiën zijn; de lijn $E''F''$, welke door de verticale projectiën E'' en F'' dezer punten gaat, zal dus de verticale projectie eener beschrijvende lijn wezen, die NF' tot horizontale projectie heeft. Op dezelfde wijze zal men de beide projectiën van elke andere beschrijvende lijn kunnen bepalen, en aldus voortgaande, verkrijgt men de projectiën $A'C'D'B'$ en $A''BCD''$ van het oppervlak, dat op bovengenoemde wijze ontstaat.

Hieruit blijkt weder, hoe men de verticale projectie van eenig punt dezes oppervlaks kan bepalen, wanneer deszelfs horizontale projectie gegeven is.

Zijn de drie rigtlijnen evenwijdig aan een zelfde vlak gegeven, dan zal het scheeve oppervlak van denzelfden aard wezen, als dat van § 318.

Zijn er onder de drie rigtlijnen, eene of twee kromme lijnen, dan zal de constructie volmaakt op dezelfde wijze kunnen geschieden.

OVER DE OMWENTELINGSVLAKKEN.

§ 321. Wanneer men eene regte lijn, of eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming, zoodanig om eene vaste regte lijn laat bewegen, dat elk punt der bewegende lijn altijd op gelijken afstand van de vaste regte lijn blijft, dan wordt door de bewegende lijn een oppervlak voortgebragt, dat men een *omwentelingsvlak* noemt. De bewegende lijn is de *beschrijvende lijn*, en de vaste regte lijn de *as* van het omwentelingsvlak.

Het is klaar, dat elk punt der beschrijvende lijn, gedurende die be-
ging, den omtrek eens cirkels zal doorloopen, welks vlak loodregt staat
de as, en welks middelpunt in de as ligt. De omwentelingsvlakken
nnen dus ook beschouwd worden, als gevormd te zijn door eenen cirkel,
lke zich zoodanig beweegt, dat, terwijl zijn middelpunt altijd in de
blijft, en zijn vlak altijd loodregt op deze as, zijn straal in elken
genblik der beweging gelijk zij aan den afstand, van het punt, waarin
t vlak des cirkels de as doorsnijdt, tot dat, waarin hetzelve eene in
ruimte gegevene regte of kromme lijn ontmoet. Hierbij verandert de
schrijvende lijn, welker gedaante bij de eerste vormingwijze standvastig
eef, in het algemeen te gelijkertijd van stelling en gedaante.

§ 322. Als men zich uit alle punten eener kromme lijn van dubbele
omming, die als beschrijvende lijn eens omwentelingsvlaks wordt aange-
mmen, loodlijnen denkt nedergelaten op de as, en wel tot aan dezelve,
n zijn deze de stralen der cirkels, welke door ieder punt worden door-
open, en hare voetpunten op de as zijn de middelpunten dezer cirkels.
u zullen echter deze stralen noch van grootte, noch van onderlingen
stand veranderen, wanneer men hen gezamenlijk nederlegt op een plat
ak, dat door de as gebragt wordt; hunne uiteinden, die altijd nog tot
t oppervlak behooren, zullen alsdan eene zekere vlakke kromme lijn
rmen, en deze vlakke kromme lijn, welke blijkbaar niet anders is,
n de doorsnede van het omwentelingsvlak met een plat vlak, dat door
as gaat, zal derhalve, door hare draaijing om de as, hetzelfde op-
rvlak voortbrengen, als de eerstgegevene beschrijvende lijn van dubbele
omming. Even gemakkelijk laat zich bewijzen, dat niet alleen de
noemde vlakke kromme lijn, maar in het algemeen elke, op een om-
entelingsvlak geteekende, lijn, door hare draaijende beweging om de as,
ederom hetzelfde oppervlak moet voortbrengen.

§ 323. Elk vlak, dat door de as van een omwentelingsvlak gaat,
oemt men een *meridiaanvlak*, en de kromme lijn, volgens welke zoo-
nig vlak het oppervlak snijdt, eene *meridiaan* van hetzelve; al de me-
dianen van eenig omwentelingsvlak zijn blijkbaar onderling gelijk en
lijkvormig. Wanneer de omwentelingsas loodregt staat op een der pro-
ctievlakken, wordt de meridiaan, die evenwijdig is aan het andere pro-
ctievlak, de *hoofdmeridiaan* van het oppervlak genoemd.

De cirkels, waaruit men kan beschouwen, dat een omwentelingsvlak
zamengesteld, en welker vlakken loodregt op de as en onderling even-
ijdig zijn, heeten de *parallelcirkels*, of alleenlijk de parallellen der op-
ervlakken.

§ 324. De klasse der omwentelingsvlakken is eene dergenen, welke
et meest in de kunsten worden gebezigd, en hare vervaardiging is al-
reenvoudigst. Er bestaan zoo vele geslachten van dezelve, als zich
derscheidene lijnen, of zelfs zamenstellingen van lijnen, tot hare
rming nemen laten, en deze geslachten verdeelen zich weder in zeer
rschillende soorten, naargelang van de stelling der as, ten opzigte
n de beschrijvende lijn.

Is de beschrijvende lijn een cirkel, en gaat de omwentelingsas door
zelfs middelpunt, dan wordt het omwentelingsvlak het oppervlak eens
ols; gaat de omwentelingsas niet door het middelpunt des cirkels, dan

ontstaat er een oppervlak, dat tot de ringvormige behoort. De ringen, die in de mechanische kunsten zoo veelvuldig voorkomen, zijn eene bijzondere soort van dit oppervlakken-geslacht.

Wentelt eene ellips om eene harer beide assen, dan verkrijgt men het oppervlak van de *spheroïde* of van de *ellipsoïde*.

Is de beschrijvende lijn eene regte lijn, dan zal er een regt cilindervlak ontstaan, wanneer die regte beschrijvende lijn evenwijdig is aan de omwentelingsas, en een regt kegelvlak, wanneer die beschrijvende lijn de as snijdt. Ligt echter de regte beschrijvende lijn niet in hetzelfde vlak met de omwentelingsas, dan ontstaat er een omwentelingsvlak, dat ook (§ 311) een scheef oppervlak is, en dat men daarom het *omwentelings-scheef-oppervlak*, of ook om redenen, die nader zullen blijken (§ 330), *omwentelings-hyperboloïde met één blad* noemt. De kortste afstand van de regte beschrijvende lijn dezes oppervlaks tot de omwentelingsas, is eene lijn die loodregt staat op deze beide lijnen, en zij beschrijft derhalve de parallel van den kleinsten straal; deze parallel wordt de *keel* des oppervlaks genoemd.

§ 325. Om de constructie der omwentelingsvlakken zooveel mogelijk te vereenvoudigen, neemt men gewoonlijk de projectievlakken zoodanig aan, dat de omwentelingsassen loodregt komen te staan op een der projectievlakken; daardoor wordt het vlak van den voortbrengenden cirkel evenwijdig aan dat projectievlak (§ 321), en het vlak van de beschrijvende kromme loodregt op hetzelve. Verder wordt, om dezelfde reden, de beschrijvende kromme aangewezen door derzelver stand, die evenwijdig is aan een der projectievlakken.

§ 326. Werkstuk. *Van een omwentelingsvlak, de beschrijvende kromme en de omwentelingsas gegeven zijnde, vraagt men dit oppervlak te construeren.*

Laat, volgens hetgeen in de vorige § gezegd is, de omwentelingsas (A′, A″C″) (fig. 128) loodregt zijn op het horizontale vlak, en zij (A′B′, A″B″C″) die stand der beschrijvende kromme, waarin zij evenwijdig is aan het verticale vlak; maakt men dan A″D″C″ gelijk aan A″B″C″, en A′D′=A′B′, dan zal (B′D′, A″B″C″D″A″) de hoofdmeridiaan des oppervlaks zijn. Nu is klaarblijkelijk A″B″C″D″A″ de omtrek of de grens van de verticale projectie des oppervlaks, terwijl de cirkel B′b′D′, die uit A′, met den grootsten straal A′B′ beschreven is, die van deszelfs horizontale projectie zal wezen.

Wil men, ter vollediger constructie van het oppervlak, de beschrijvende kromme nog in andere standen projecteren, b. v. in den stand, waarin A′b′ hare horizontale projectie is, dan kan dit zeer gemakkelijk geschieden. Verbeeldt men zich de hoofdmeridiaan zoover om de omwentelingsas gedraaid, totdat zij in dien stand gekomen is, waarin A′b′ hare horizontale projectie wordt, dan zal het punt (B′,B″) van dezelve een' cirkelboog beschreven hebben, welks verticale projectie in B″D″ ligt, en welks horizontale projectie B′b′ is. Dewijl nu b′ de horizontale projectie van het punt (B′,B″) na de beweging is, zoo is het punt b″, waarin B″D″ gesneden wordt door de lijn, die uit b′ loodregt door de as van projectie gaat, de verticale projectie van het punt (B′,B″) na de beweging. De horizontale projectie E′ van eenig ander punt (E′,E″) der beschrijvende kromme, komt na de beweging in e′, en de verticale projectie e″, die

in E″F″ moet liggen, welke uit E″ loodregt op A″C″ getrokken is, wordt weder gevonden, door het snijpunt te bepalen van E″F″ met de lijn, die uit e′ loodregt door de as van projectie gaat. Bepaalt men op dezelfde wijze de verticale projectie van nog meer punten, en trekt men door dezelve eene kromme lijn A″b″C″, dan zal deze de verticale projectie wezen van de beschrijvende kromme, in derzelver nieuwen stand. Op deze wijze kunnen zooveel standen van de beschrijvende kromme geprojecteerd worden, als men verkiest.

§ 327. Werkstuk. *Wanneer* RS, *evenwijdig aan* PQ, (*fig.* 128) *in het vrige werkstuk de as van projectie is, dan zal het omwentelingsvlak door het verticale vlak gesneden worden: men vraagt den doorgang te bepalen, die daardoor ontstaat.*

De cirkel G′I′H′, welke RS aanraakt, is klaarblijkelijk de horizontale projectie van de twee cirkels op het oppervlak, welke het verticale vlak aanraken, en derhalve den begeerden doorgang boven en beneden door hunne raakpunten I begrenzen. Dewijl G″H″ en G″H″ de verticale projectiën dezer cirkels zijn, zoo zullen de punten I″ en I″, waar deze lijnen de lijn I′C″ snijden, de grenspunten des doorgangs wezen. De horizontale projectie van het uiterste punt des doorgangs ter linkerzijde, is blijkbaar K′; derhalve is K″, gelegen in de projectie B″D″ des cirkels, waarvan D′K′B′ de horizontale projectie is, de verticale projectie van dit punt. Om andere punten des doorgangs, b. v. dat punt, welks horizontale projectie L′ is, te verkrijgen, beschrijft men uit A′, met A′L′ als straal, een' cirkelboog, die B′D′ in M′ snijdt, en trekt uit M′ eene loodlijn door de as van projectie, dan zullen de punten M″ en M″, waar deze loodlijn de verticale projectie van de beschrijvende kromme snijdt, de hoogten aanwijzen van de horizontale cirkels, waarop het punt L gelegen is. De lijnen M″N″ en M″N″, loodregt op A″C″, zijn derhalve de verticale projectiën dezer cirkels, en in dezelve moeten de verticale projectiën van het punt L gelegen wezen; wordt dus uit L′ eene loodlijn door de as van projectie getrokken, dan zullen de snijpunten L″ en L″ van deze loodlijn met de lijnen M″N″ en M″N″, de verticale projectiën van het punt L zijn. Door andere punten tusschen K′ en I′ aan te nemen, en daarmede op dezelfde wijze als met L′ te handelen, zal men nog meer punten des doorgangs kunnen bepalen. Door behoorlijke vereeniging dezer punten verkrijgt men den halven doorgang I″L″K″L″I″; de andere helft wordt op dezelfde wijze, of ook door de reeds gevondene helft aan den anderen kant over te brengen, bepaald.

§ 328. Werkstuk. *De horizontale projectie van eenig punt eens omwentelingsvlaks gegeven zijnde, vraagt men deszelfs verticale projectie te bepalen.*

Is de omwentelingsas loodregt op het horizontale vlak, en is de hoofdmeridiaan door hare beide projectiën gegeven, dan zal de lijn, die de gegevene horizontale projectie van eenig punt des oppervlaks met de horizontale projectie van de omwentelingsas vereenigt, de horizontale projectie, en tevens de werkelijke lengte zijn van den straal der horizontale cirkels, waarop het punt des oppervlaks gelegen is, en men zal dus de horizontale projectie van deze cirkels kunnen construeren. Trekt men nu aan deze horizontale projectie eene raaklijn, die loodregt door de as van projectie gaat, dan zullen de punten, waarin deze raaklijn de ver-

ticale projectie van de hoofdmeridiaan snijdt, de hoogten van bovengenoemde cirkels aanwijzen, en men zal dus ook derzelver verticale projectiën kunnen bepalen, door uit de gevondene snijpunten lijnen evenwijdig aan de as van projectie te trekken. De punten, waarin deze verticale projectiën gesneden worden door de lijn, die uit de gegevene horizontale projectie van het punt loodregt door de as van projectie gaat, zullen de begeerde verticale projectiën aanwijzen.

Laat b. v. L′ (fig. 128) de gegevene horizontale projectie wezen, dan is de cirkel, die uit A′, met A′L′ als straal, beschreven wordt, de horizontale projectie van de parallellen, waarop het punt L des oppervlaks gelegen is. De raaklijn, die aan het punt M′ dezes cirkels getrokken wordt, snijdt de verticale projectie der hoofdmeridiaan in M″ en M‴; de lijnen M″N″ en M‴N‴ zijn dus de verticale projectiën van bovengenoemde parallellen, terwijl L″ en L‴ de gevraagde verticale projectiën zullen wezen. Hieruit volgt, dat er in dit geval twee punten L op het oppervlak zijn, die L′ tot horizontale projectie hebben.

§ 329. Is de verticale projectie L″ gegeven, en moet men de horizontale projectie van het overeenkomstige punt bepalen, dan beschrijft men uit A′, met A′L′=M″O″ als straal, eenen cirkel, en trekt uit L″ eene loodlijn door de as van projectie; het punt L′, waar deze loodlijn den beschrevenen cirkel snijdt, zal alsdan de begeerde horizontale projectie wezen. Daar echter deze loodlijn dien cirkel ook beneden B′D′ zal snijden, zoo zullen er in dit geval mede twee punten op het oppervlak zijn, die L″ tot verticale projectie hebben.

Het is klaar, dat de beschrijvende lijn van een omwentelingsvlak zoodanig wezen kan, dat met eene aangenomene horizontale projectie van eenig punt des oppervlaks, drie, vier en meer verticale projectiën kunnen overeenstemmen, en zoo ook omgekeerd.

§ 330. Werkstuk. *Eene regte lijn wentelt om eene andere regte lijn, die niet met haar in hetzelfde vlak ligt, zoodanig, dat zij altijd denzelfden stand ten opzigte van die lijn behoudt, en brengt door die beweging een gebogen oppervlak voort: men vraagt de vlakke kromme lijn te bepalen, die als beschrijvende kromme, om dezelfde as wentelende, hetzelfde gebogen oppervlak zal doen ontstaan.*

Ter oplossing van dit werkstuk legge men, volgens § 322, al de loodlijnen, die uit de punten der regte beschrijvende lijn op de omwentelingsas kunnen worden nedergelaten, op een plat vlak neder, dat door de omwentelingsas gaat, dan zal men, door de uiteinden dezer loodlijnen te vereenigen, de vlakke kromme lijn verkrijgen, die, door hare omwenteling om de as, hetzelfde oppervlak voortbrengt, als de eerstgegevene regte beschrijvende lijn. Merkt men echter op, dat de uiteinden dezer loodlijnen niet anders zijn, dan de punten, waarin de omtrekken der cirkels, die door elk dezer loodlijnen worden beschreven, het platte vlak snijden, dat door de omwentelingsas gaat, dan zal men slechts deze snijpunten behoeven te bepalen, en deze behoorlijk met elkander moeten vereenigen. Om de constructie te vereenvoudigen, neme men de omwentelingas loodregt op het horizontale vlak, en, ten einde de hoofdmeridiaan des oppervlaks te bepalen, brenge men het vlak, dat door de omwentelingsas gaat, evenwijdig aan het verticale vlak.

Laat b. v. (A′, *A*S′) en (C′D′, C″D″) (fig. 129) de beide gegevene regte lijnen zijn, waarvan de eerste de omwentelingsas is, die loodregt staat op het horizontale vlak, en de tweede de beschrijvende lijn des oppervlaks; laat verder RS de horizontale doorgang zijn van een vlak, dat door de omwentelingsas gaat, en evenwijdig is aan het verticale vlak, dan zal het er slechts op aankomen, om de punten te bepalen, waarin de omtrekken der cirkels, die door de verschillende punten der bewegende lijn worden beschreven, het vlak RS snijden, en deze snijpunten behoorlijk vereenigende, zal men de hoofdmeridiaan des oppervlaks bekomen, dat is, de kromme lijn, die, door hare wenteling om de as, hetzelfde oppervlak zal voortbrengen, als de regte beschrijvende lijn. Zij daartoe (F′, F″) een willekeurig punt der beschrijvende lijn, dan is (F′A′,F″K″) de loodlijn, die uit dit punt op de omwentelingsas valt, terwijl de werkelijke lengte dezer loodlijn gelijk is aan A′F′; wordt dus uit A′, met A′F′ als straal, een cirkel beschreven, dan zal deze de horizontale projectie wezen van den horizontalen cirkel, die door het punt (F′, F″) wordt doorloopen, terwijl de verticale projectie van dezen cirkel gevonden wordt, door K″f″ = A′F′, ter wederzijden van K″, op F″K″ uit te zetten. Deze cirkel snijdt blijkbaar het vlak RS in twee punten, die f′ tot horizontale, en f″ tot verticale projectie hebben; de punten (f′,f″) zijn alzoo punten van de hoofdmeridiaan des oppervlaks. Handelt men met andere punten (H′,H″) der beschrijvende lijn op dezelfde wijze als met (F′, F″), dan zal men zooveel punten van de hoofdmeridiaan kunnen bepalen, als men verkiest.

Laat men uit A′ eene loodlijn A′E′ op C′D′ neder, dan is (E′A′,E″B″) de kortste afstand der beide gegevene lijnen, of de lijn, die te gelijkertijd loodregt op beide staat; het punt (E′,E″) zal dus den kleinsten cirkel, of de keel des oppervlaks doorloopen. De punten, waarin deze cirkel of parallel het vlak RS snijdt, zijn (e′,e″).

Vereenigt men de verticale projectiën van de gevondene punten der hoofdmeridiaan, dan zal men eene kromme lijn f″e″g″ verkrijgen, welke eene hyperbool genoemd wordt, en die de verticale projectie C″D″ der bewegende lijn in g″ aanraakt, welk punt overeenstemt met het punt G′, dat aan de lijnen C′D′ en RS gemeen is. De halve eerste as dezer hyperbool is B″e″, en derzelver halve tweede as wordt gevonden, door eene vierde evenredige te zoeken tot G′E′,B″D″ en B″e″.

Wentelt nu de hyperbool, waarvan f″e″g″ de verticale, en RS de horizontale projectie is, om de as (A′,*A*S″), dan zal zij hetzelfde oppervlak voortbrengen, als door de opgegevene beweging van de lijn (C′D′,C″D″) ontstaat; het is daarom, dat dit omwentelings scheef-oppervlak ook den naam van omwentelings-hyperboloïde met één blad draagt.

§ 331. Werkstuk. *Het oppervlak te construeren van den gewonen ring, dat is van het oppervlak, hetwelk ontstaat, wanneer een cirkel wentelt om eene lijn, die in het vlak van den cirkel ligt, maar niet door zijn middelpunt gaat.*

Laat (A′,*A*A″) (fig. 130) de omwentelingsas zijn, die loodregt staat op het horizontale vlak, en zij de cirkel, uit C″ met C″B″ als straal beschreven, de verticale projectie van den beschrijvenden cirkel, wanneer hij zich evenwijdig aan het verticale vlak bevindt. Trekt men nu uit

C″ eene loodlijn op ΔA″, en neemt men op deze loodlijn de lijn O″I″=O″C″, dan zal, als men uit I″, met I″E″=B″C″ als straal, eenen cirkel beschrijft, en aan denzelven de raaklijnen H″K″ en F″Q″, evenwijdig aan de as van projectie, trekt, G″F″Q″D″K″H″G″ de verticale projectie, en G′D′ de horizontale projectie van de hoofdmeridiaan des oppervlaks wezen. Beschrijft men verder uit A′ twee cirkels, met A′B′ = O″B″ en met A′D′ = O″D″ als stralen, dan zal tusschen den buitensten omtrek van den eersten en den binnensten omtrek van den tweeden cirkel, de horizontale projectie van het oppervlak begrepen zijn, terwijl G″F″Q″D″K″H″G″ blijkbaar de grens van de verticale projectie dezes oppervlaks zal wezen.

De lijn, waarvan A′B′ de horizontale en O″B″ de verticale projectie is, zal de keel van den ring doorloopen.

Is P′ de horizontale projectie van eenig punt des oppervlaks, dan zullen daarmede (§ 326) de verticale projectiën P″ en P‴ overeenstemmen.

OVER DE RINGVORMIGE OPPERVLAKKEN.

§ 332. Wanneer men eene kromme lijn volgens eene zekere wet op eene andere kromme lijn laat bewegen, dan zal de bewegende kromme een gebogen oppervlak beschrijven, dat een *ringvormig oppervlak* genoemd wordt.

Laat men b. v. een cirkel met deszelfs middelpunt altijd op eene willekeurige kromme lijn bewegen, zoodanig, dat het vlak van den cirkel deze kromme lijn altijd regthoekig doorsnijdt, dan zal de omtrek van dezen cirkel een ringvormig oppervlak voortbrengen. Ligt bij deze beweging een ander punt van dezen cirkel altijd op de kromme rigtlijn, of is de bewegende kromme geen cirkel, dan moet men nog eene nieuwe voorwaarde van beweging opgeven; want dan kan het vlak der bewegende kromme om het punt, waarmede zij op de rigtlijn rust, draaijen, zonder daarom op te houden loodregt op dezelve te staan, en het oppervlak zou dus gedurig van gedaante kunnen veranderen. Om de beweging der kromme lijn alsdan volkomen te bepalen, kan men verschillende voorwaarden uitdenken, welke alle tot zooveel verschillende oppervlakken aanleiding geven. Zoo zou men bij de reeds gegevene voorwaarden nog deze kunnen voegen, dat eene bepaalde lijn in het vlak der bewegende kromme, gedurende de beweging, steeds door eene gegevene regte of kromme lijn moet gaan.

In plaats van het vlak der bewegende kromme steeds loodregt op de kromme rigtlijn te onderstellen, kan men hetzelve evenwijdig met zich zelven bewegen, en gedurende deze beweging een bepaald punt van het vlak der kromme altijd op de gegevene kromme lijn laten blijven. Is de bewegende kromme lijn alsdan een cirkel, die niet met zijn middelpunt op de rigtlijn rust, of is de bewegende kromme lijn geen cirkel, dan moet men, om de beweging te bepalen, hier nog de voorwaarde bijvoegen, dat eene bepaalde lijn in het vlak der bewegende kromme altijd evenwijdig aan zich zelve blijft.

Men kan ook als voorwaarde der beweging van de beschrijvende kromme lijn aannemen, dat, terwijl eenig punt van derzelver vlak altijd op de kromme rigtlijn blijft, haar vlak gedurig door eene zelfde regte lijn gaat. Neemt men b. v. een' regten cirkelvormigen cilinder, waarop eene schroeflijn beschreven is (§ 277), en laat men een' cirkel met deszelfs middel-

punt altijd op deze schroeflijn rusten, terwijl het vlak van den cirkel steeds door de as van den cilinder gaat, dan zal de omtrek dezes cirkels een ringvormig oppervlak doorloopen, waarvan de bovenste helft tot de constructie der verwulfde wenteltrappen gebruikt wordt.

Het eenvoudigste ringvormig oppervlak ontstaat door de beweging van eenen cirkel, die met zijn middelpunt altijd op den omtrek eens anderen cirkels rust, terwijl het vlak van den eersten gedurig loodregt op den omtrek des tweeden blijft. Men ziet gemakkelijk in, dat dit oppervlak hetzelfde is als dat van den gewonen ring (§ 331), en dus tot de omwentelingsvlakken behoort; want het wordt ook voortgebragt door den bewegenden cirkel te laten wentelen om de as van den anderen, dat is, om de lijn, die door zijn middelpunt gaat, en loodregt staat op zijn vlak: het is namelijk klaar, dat het middelpunt van den bewegenden cirkel alsdan een' cirkel zal doorloopen, waarop het vlak van den bewegenden cirkel altijd loodregt staat.

VERDEELING DER OPPERVLAKKEN IN ONTWIKKELBARE EN ONONTWIKKELBARE.

§ 333. Men noemt een oppervlak *ontwikkelbaar*, wanneer hetzelve zonder plooijen of scheuren op een plat vlak kan worden uitgespreid.

De veelvlakkige ligchamen hebben het denkbeeld van de ontwikkeling der oppervlakken doen ontstaan. Het is namelijk klaar, dat als men de deelen der oppervlakken van deze ligchamen, om de ribben, waarmede zij aan elkander sluiten, beweegbaar onderstelt, men dezelve in een zelfde vlak naast elkander kan leggen, en dus het geheele oppervlak op dit platte vlak ontwikkelen kan. Ten opzigte der ontwikkeling van deze oppervlakken, zijn er echter nog verscheidenheden, welke van belang zijn, om op te merken.

Wanneer men eene piramide beschouwt, en het grondvlak niet in aanmerking neemt, dan is het klaar, dat de ontwikkeling van het oppervlak op het vlak van eene der zijden kan bewerkstelligd worden, en dat alsdan al de zijvlakken naast elkander zullen komen te liggen, zonder dat er ergens eenige ledige ruimte of verbreking van den zamenhang zal bestaan. Hetzelfde zal plaats hebben ten opzigte der prisma's, wanneer men namelijk het grond- en bovenvlak wegdenkt, en het is klaar, dat men dezelve hier niet in rekening mag brengen, omdat de grondvlakken der prisma's en piramiden niet anders zijn dan grenzen, welke de verbeelding of de noodzakelijkheid ons aan deze vlakken doet toekennen, welke uit derzelver aard ondertusschen onbepaald voortloopen.

Wil men daarentegen het oppervlak van eenig ander veelvlakkig ligchaam, b. v. een icosaëdrum of dodecaëdrum, ontwikkelen, dan kan men al de deelen van dit oppervlak wel op een zelfde vlak uitspreiden, doch dan zullen deze deelen in de ontwikkeling hier en daar van elkander zijn afgezonderd, en geen zamenhangend geheel meer uitmaken.

§ 334. Ook sommige gebogene oppervlakken zijn ontwikkelbaar, of kunnen op een plat vlak worden uitgespreid. Tot de ontwikkelbaarheid van een gebogen oppervlak wordt klaarblijkelijk vooreerst vereischt, dat hetzelve kan beschouwd worden als door eene regte lijn te zijn voortge-

bragt, en ten andere, dat elke twee onmiddellijk op elkander volgende standen dezer regte beschrijvende lijn elkander snijden of evenwijdig loopen, en dus in een zelfde vlak gelegen zijn; want van zoodanig gebogen oppervlak kan men elk element, dat gelegen is tusschen twee onmiddellijk op elkander volgende beschrijvende lijnen, als een plat vlak beschouwen, en dit element, om de beschrijvende lijn, waarmede het aan het vorige sluit, omwentelen, tot dat het in deszelfs verlengde gelegen is, en aldus voortgaande, het geheele gebogen oppervlak op het platte vlak uitspreiden, dat het verlengde is van het eerstaangenomen element.

Het is klaar, dat van de hierboven beschouwde geslachten van gebogene oppervlakken, de kegel- en cilindervlakken de eenige zijn, welke ontwikkeld kunnen worden, dat is, zij kunnen, wanneer zij volgens een' der standen van de beschrijvende lijn worden doorgesneden, op een plat vlak zonder te scheuren of te plooijen worden uitgespannen. Immers men kan zich een kegelvlak denken als uit een oneindig aantal van oneindig kleine vlakke hoeken te bestaan, en alsdan kan men zich verbeelden, dat elk dezer hoekjes, om het been, waarmede het aan het voorgaande hoekje sluit, wordt omgewenteld, tot dat het zich in het verlengde vlak van het voorgaande hoekje bevindt. Men kan zich hiervan nog beter overtuigen, door zich het kegelvlak als het oppervlak eener piramide van een zeer groot aantal zijden voor te stellen; want dan zal men bespeuren, dat deze stelling waar blijft, hoezeer men het aantal der zijden in deze piramide ook vermeerderen wil. Deze stelling moet dus ook doorgaan voor het kegelvlak, hetwelk al de oppervlakken dezer piramiden omsluit. Dezelfde redenering gaat ook door voor alle cilindervlakken, omdat zij als oppervlakken van prisma's van een oneindig aantal zijden kunnen beschouwd worden.

Ofschoon de scheeve oppervlakken ook door regte lijnen worden voortgebragt, zijn zij echter niet ontwikkelbaar; want elke twee onmiddellijk op elkander volgende standen van derzelver beschrijvende lijnen liggen niet in een zelfde vlak, maar kruisen elkander in de ruimte. De scheeve oppervlakken, zoowel als de omwentelingsvlakken met kromme meridianen, en de ringvormige oppervlakken, zijn alzoo onontwikkelbare oppervlakken.

§ 335. Om een volledig denkbeeld te hebben van de ontwikkelbare oppervlakken in het algemeen, verbeelde men zich het oppervlak, dat er ontstaat, wanneer men van eenen veelhoek ABCD enz. (fig. 131), waarvan elke drie op elkander volgende zijden niet in een zelfde vlak liggen, al de zijden onbepaaldelijk verlengt. Dit veelvlakkig oppervlak bestaat uit de vlakke hoeken PAQ, QBR, enz., die twee aan twee eenen tweevlakkigen hoek insluiten; verbeeldt men zich daarenboven, dat al de ribben verlengd zijn aan de andere zijde van den veelhoek, dan zal daardoor een tweede veelvlakkig oppervlak ontstaan, hetwelk van het eerste door den veelhoek ABCD enz. is afgescheiden, even als de bladen van een kegelvlak door deszelfs top. Onderstelt men verder, dat bovengenoemde veelhoek beschreven zij in eene gegevene kromme lijn van dubbele kromming, en vermeerdert men achtervolgens het aantal van deszelfs zijden, dan zal men op deze wijze eene menigte van veelvlakkige oppervlakken bepalen, waarvan iedere ribbe met de onmiddellijk daaropvolgende in een zelfde vlak ligt; de limiet of grens van al deze veelvlak-

kige oppervlakken zal een gebogen oppervlak zijn, dat dezelfde eigenschap bezit, en dus een ontwikkelbaar oppervlak zal wezen. Dit gebogen oppervlak is het *algemeen ontwikkelbaar oppervlak*, waarvan de cilinder- en kegelvlakken slechts bijzondere gevallen uitmaken.

Het is klaar, dat, bij dit overgaan tot de limiet, de veelhoek in de gegevene kromme lijn verandert, en dat de ribben van het veelvlakkig oppervlak raaklijnen worden aan deze kromme lijn; het algemeen ontwikkelbaar oppervlak kan derhalve beschouwd worden als voortgebragt te zijn door eene regte lijn, die altijd raaklijn blijft aan eene gegevene kromme lijn van dubbele kromming. Deze kromme lijn wordt de *keerlijn* (*) van het algemeen ontwikkelbaar oppervlak genoemd; de beide bladen van dit oppervlak zullen volgens deze keerlijn aan elkander sluiten. Zoo zal men b. v. een ontwikkelbaar oppervlak verkrijgen, door eene regte lijn zich zoodanig te laten bewegen, dat zij altijd raaklijn blijft aan eene gegevene schroeflijn (fig. 118); de lijn ($X'C'$, XC'') is eene van de beschrijvende lijnen dezes oppervlaks, hetwelk den naam draagt van *ontwikkelbare héliçoïde*.

§ 336. De kromme lijnen, welke op een cilindervlak zoodanig worden beschreven, dat zij met al de beschrijvende lijnen eenen standvastigen hoek maken, worden in het algemeen *hélices* of *schroeflijnen* genoemd.

Het is gemakkelijk in te zien, dat elke schroeflijn bij de ontwikkeling van het cilindervlak, waarop zij beschreven is, eene regte lijn moet worden; want daar alsdan al de beschrijvende lijnen des cilindervlaks in een zelfde vlak komen te liggen en onderling evenwijdig blijven, kan de lijn, welke al deze beschrijvende lijnen onder eenen standvastigen hoek doorsnijdt, niets anders dan eene regte lijn zijn.

Is het cilindervlak regt en cirkelvormig, dan zal de daarop beschrevene schroeflijn niets anders wezen dan de *gewone schroeflijn*, welke wij reeds in § 275 hebben leeren kennen.

§ 337. De schroeflijnen hebben de eigenschap van de kortste lijnen te zijn, welke op de cilindervlakken van een punt tot een ander punt getrokken kunnen worden, en hiervan kan men zich gemakkelijk overtuigen, door op te merken, dat de uitgebreidheid van een vlak niet verandert, door hetzelve om eenen cilinder te wikkelen, en dat de lijnen, welke de punten in de ontwikkeling op eene of andere wijze vereenigen, bij de wikkeling om den cilinder volstrekt dezelfde lengte blijven behouden. Nu is in de ontwikkeling de kortste afstand tusschen twee punten eene regte lijn, en dezelve moet dus op het oppervlak van den cilinder eene schroeflijn zijn. Wanneer men derhalve eenen draad over een cilindervlak heen buigt, zoodat dezelve gespannen is, dan zal deze draad de gedaante van eene schroeflijn aannemen.

§ 338. Hetgeen ten opzigte van de cilindervlakken gezegd is, is ook toepasselijk op de kegelvlakken en op alle andere ontwikkelbare oppervlakken. De kortste afstand tusschen twee van derzelver punten zal op

(*) Snijdt men het algemeen ontwikkelbaar oppervlak door een plat vlak, dan is de doorsnede eene kromme lijn, die in het punt, waarin het snijdende vlak de kromme lijn van dubbele kromming ontmoet, een keerpunt heeft; dit is de reden, waarom men deze kromme lijn van dubbele kromming den naam van keerlijn geeft.

het oppervlak worden aangewezen door eene kromme lijn, welke bij de ontwikkeling in eene regte lijn verandert; zulke kromme lijnen, op een kegelvlak beschreven zijnde, worden in het algemeen *spiralen* of *krullijnen* genoemd.

Eene spiraal, die op eenen regten cirkelvormigen kegel beschreven is, heeft tot projectie op het grondvlak dezes kegels eene dergelijke lijn, welker punten in standvastige reden tot het middelpunt van het grondvlak des kegels naderen; deze projectie is de bekende spiraal van *Archimedes*.

Ook op omwentelingsvlakken, b. v. op een' bol of op eene spheroïde, kunnen spiraalvormige kromme lijnen worden beschreven, die daar echter niet den kortsten afstand tusschen twee punten van het oppervlak zullen aantoonen. Zoo is b. v. de weg, dien een schip aflegt, wanneer het altijd in eene zelfde tusschenstreek van het kompas voortzeilt, en dus alle meridianen onder denzelfden hoek doorsnijdt, eene spiraalvormige kromme lijn, welke in het bijzonder den naam van *loxodromische lijn* draagt.

OVER DE DOORSNIJDING DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

OVER DE DOORSNIJDING DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN MET REGTE LIJNEN.

§ 339. Om de snijpunten van eene regte lijn met eenig gebogen oppervlak te bepalen, kan men eene der beide projectiën van deze lijn beschouwen als de gelijknamige projectie te zijn van eene vlakke kromme lijn, die op het gebogen oppervlak gelegen is; construeert men nu, naar aanleiding van de gegevene wording van het gebogen oppervlak, de andere projectie dezer vlakke kromme lijn, dan heeft men eigenlijk de vlakke kromme lijn bepaald, volgens welke een der projecterende vlakken van de gegevene regte lijn het gebogen oppervlak snijdt. Deze vlakke kromme lijn ligt alzoo in een der projecterende vlakken van de gegevene regte lijn, en daar deze laatste mede in dit projecterend vlak gelegen is, zal zij de kromme in een of meer punten kunnen snijden; deze punten, als te gelijkertijd op de regte lijn en op het gebogen oppervlak gelegen zijnde, zullen de begeerde snijpunten wezen.

Deze algemeene leerwijze, om de snijpunten van eene regte lijn met eenig gebogen oppervlak te bepalen, behoeft bij de cilinder- en kegelvlakken niet gevolgd te worden, zoo als uit de behandeling der twee volgende werkstukken zal blijken.

§ 340. Werkstuk. *De punten te bepalen, waarin eene gegevene regte lijn een gegeven cilindervlak snijdt.*

In plaats van volgens de algemeene leerwijze der vorige § te werk te gaan, kan men in dit geval de begeerde snijpunten gemakkelijker bepalen. Men merke daartoe op, dat de beschrijvende lijnen des cilindervlaks, waarop de gezochte snijpunten gelegen zijn, met de gegevene lijn in hetzelfde vlak moeten liggen, en dat elke lijn, die door eenig punt der gegevene lijn evenwijdig aan de rigting der beschrijvende lijnen van het cilindervlak getrokken wordt, mede in dit vlak zal gelegen wezen; het vlak, dat de begeerde snijpunten bevat, is dus bepaald door de gegevene lijn en door eene lijn, die uit een willekeurig punt der gegevene lijn evenwijdig aan de rigting der beschrijvende lijnen des cilindervlaks getrokken wordt. Dit vlak geconstrueerd zijnde, alsmede de beschrijvende lijnen, volgens welke het cilindervlak door hetzelve gesneden wordt, zullen de snijpunten dezer beschrijvende lijnen met de ge-

gevene lijn de begeerde zijn. Is alzoo de rigtlijn des cilindervlaks in het horizontale vlak gegeven, dan zullen de punten, waarin deze rigtlijn gesneden wordt door den horizontalen doorgang van bovengenoemd vlak, terstond de beschrijvende lijnen bepalen, welke, door derzelver snijding met de gegevene lijn, de begeerde snijpunten zullen opleveren. Snijdt de horizontale doorgang des vlaks de rigtlijn des cilindervlaks niet, dan zal de gegevene lijn ook het cilindervlak niet snijden.

§ 341. Werkstuk. *De punten te bepalen, waarin eene gegevene regte lijn een gegeven kegelvlak snijdt.*

Ook hier zal men de begeerde snijpunten gemakkelijker kunnen bepalen, dan volgens de algemeene leerwijze van § 339. Men merke namelijk op, dat de beschrijvende lijnen des kegelvlaks, waarop de gezochte snijpunten moeten gelegen zijn, met de gegevene lijn in hetzelfde vlak moeten liggen, en dat al de beschrijvende lijnen van het kegelvlak door deszelfs top gaan; het vlak, dat de begeerde snijpunten bevat, is dus bepaald door de gegevene lijn en den top des kegelvlaks. Dit vlak geconstrueerd zijnde, alsmede de beschrijvende lijnen, volgens welke het kegelvlak door hetzelve gesneden wordt, zullen de snijpunten dezer beschrijvende lijnen met de gegevene lijn de begeerde zijn. Is alzoo de rigtlijn des kegelvlaks in het horizontale vlak gegeven, dan zullen de punten, waarin deze rigtlijn gesneden wordt door den horizontalen doorgang van bovengenoemd vlak, terstond de beschrijvende lijnen bepalen, welke, door derzelver snijding met de gegevene lijn, de begeerde snijpunten zullen opleveren. Snijdt de horizontale doorgang des vlaks de rigtlijn niet, dan zal de gegevene lijn ook het kegelvlak niet snijden.

OVER DE DOORSNIJDING DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN MET PLATTE VLAKKEN.

§ 342. De in § 292 opgegevene handelwijze, om de gebogene oppervlakken voor te stellen, is tevens zeer geschikt, om de doorsneden te bepalen van de gebogene oppervlakken met platte vlakken. Daar namelijk deze doorsneden zich op de gebogene oppervlakken bevinden, zoo behoort elk van derzelver punten tot eenigen stand der beschrijvende lijn; dewijl nu dit punt tevens in het snijdende vlak ligt, zoo is het de doorsnede van die beschrijvende lijn met het snijdende vlak. Neemt men dus, binnen de grenzen der doorsnede, verschillende standen der beschrijvende lijn aan, en bepaalt men de punten, waarin deze beschrijvende lijnen het snijdende vlak ontmoeten, dan zullen deze punten tot de begeerde doorsnede van het gebogen oppervlak met het platte vlak behooren. Heeft men op deze wijze een genoegzaam aantal van zulke punten bepaald, dan zal men, door dezelve behoorlijk te vereenigen, de begeerde doorsnede zelve bekomen.

§ 343. Werkstuk. *De doorsnede van een plat vlak met een cilindervlak te bepalen.*

Neemt men in de rigtlijn des cilindervlaks een willekeurig punt aan, en construeert men (§ 296) de beschrijvende lijn, die door dit punt gaat, dan zal het punt, waar deze beschrijvende lijn het gegeven vlak snijdt, een punt van de gevraagde doorsnede wezen. Herhaalt men deze constructie op een genoegzaam aantal punten, dan zal men, door de hori-

zontale en verticale projectiën dezer punten behoorlijk te vereenigen, de beide projectiën der gevraagde doorsnede verkrijgen.

In fig. 132 is de doorsnede voorgesteld van een regt cirkelvormig cilindervlak met een vlak $A''PP'$, dat loodregt is op het verticale vlak. Hier is blijkbaar de cirkel $A'B'C'$ enz., die de horizontale projectie van het geheele cilindervlak is, tevens de horizontale projectie van de doorsnede, terwijl $A''G''$ derzelver verticale projectie is.

Om deze doorsnede in derzelver ware gedaante en grootte te leeren kennen, moet men het snijdende vlak om een' van deszelfs doorgangen op het overeenkomstige projectievlak nederslaan, en alsdan bepalen (§ 92), waar elk punt der doorsnede komt te vallen. In dit geval kan men echter daartoe korter te werk gaan: men verbeelde zich namelijk, dat het snijdende vlak om de lijn $(A'P', A''P)$, die in hetzelve gelegen is, en evenwijdig loopt aan het verticale vlak, wordt omgedraaid, totdat hetzelve evenwijdig gekomen is aan het verticale vlak, dan zal de projectie der doorsnede in dezen stand te gelijkertijd derzelver ware gedaante en grootte aanwijzen. De lijnen BM, CL, DK, enz., die loodregt staan op het verticale vlak, en gelijk zijn aan derzelver projectiën $B'M'$, $C'L'$, $D'K'$, enz. behoeven dan slechts in B'', C'', D'' enz. loodregt op $A''P$ gesteld te worden, dewijl zij de ware grootten aanwijzen van de koorden der doorsnede, die door B, C, D enz. gaan, en loodregt staan op het verticale vlak. De uiteinden B, M, C, L, D, K enz. dezer lijnen zijn alsdan punten der begeerde kromme lijn, en wanneer men deze behoorlijk met elkander vereenigt, zal men de omgeslagene doorsnede $A''BCD$ enz. verkrijgen.

Wordt een willekeurig cilindervlak, waarvan de rigtlijn $A'B'C'D'$ (fig. 134) in het horizontale vlak ligt, en waarin $(B'P', BP'')$ een der standen van de beschrijvende lijn is, gesneden door een willekeurig vlak $T''TT'$, dan zoekt men, om deze doorsnede te bepalen, het punt (N', N''), waarin eene der beschrijvende lijnen $(M'N', MN'')$ des cilindervlaks het vlak $T'TT'$ snijdt (§ 82), als wanneer N' en N'' punten van de projectiën der begeerde doorsnede zullen wezen. Op dezelfde wijze zoekt men een genoegzaam aantal snijpunten van andere standen der beschrijvende lijn met het snijdende vlak, en de projectiën dezer snijpunten behoorlijk met elkander verbindende, zal men de projectiën $N'R'O'S'P'$ en $N''R''O''S''P''$ der doorsnede verkrijgen. Het is klaar, dat men de grenspunten (O', O''), (P', P''), (R', R'') en (S', S'') zal bekomen, door de beschrijvende lijnen te construeren, welke door de punten D', B', A' en C' van de rigtlijn gaan.

Van de horizontale projectie der doorsnede is dat gedeelte scherp geteekend, waarvan de overeenkomstige punten in de ruimte zigtbaar zijn, wanneer het cilindervlak regt van boven wordt beschouwd; de punten van dat gedeelte worden bepaald door de beschrijvende lijnen, welke uit den boog $A'B'C'$ voortkomen. Daarentegen zijn in de verticale projectie die punten door eene scherpe lijn verbonden, welke tot standen der beschrijvende lijn behooren, die van den boog $B'A'D'$ uitgaan, en dus zigtbaar zijn, wanneer het cilindervlak regt van voren wordt beschouwd.

Door het vlak $T'TT''$, waarin de doorsnede gelegen is, op een der projectievlakken, b. v. op het horizontale, neder te slaan, en (§ 92) te bepalen,

waar een genoegzaam aantal punten der doorsnede alsdan komt te vallen, zal men de omgeslagene doorsnede NROSP bekomen.

§ 344. Wanneer het platte vlak evenwijdig loopt aan de beschrijvende lijn des cilindervlaks, dan zal dit vlak het cilindervlak of niet, of volgens regte lijnen snijden. Ligt de rigtlijn des cilindervlaks in het horizontale vlak, dan worden deze doorsnijdingen gevonden, door de beschrijvende lijnen te construeren, die voortkomen uit de punten, waarin de horizontale doorgang des vlaks de rigtlijn snijdt.

§ 345. Thans kan men ook de in § 272 vermelde projectie eener kromme lijn van dubbele kromming op een van derzelver normaalvlakken bepalen. Men behoeft daartoe slechts de kromme lijn tot rigtlijn, en de door het normaalvlak bepaalde raaklijn tot beschrijvende lijn van een cilindervlak aan te nemen; bepaalt men nu, volgens § 343, de doorsnede van dit cilindervlak met het normaalvlak, dan zal deze doorsnede de begeerde projectie wezen van de kromme lijn op het normaalvlak.

§ 346. Werkstuk. *De doorsnede van een plat vlak met een kegelvlak te bepalen.*

Neemt men in de rigtlijn des kegelvlaks een willekeurig punt aan, en construeert men (§ 305) de beschrijvende lijn, die door dit punt gaat, dan zal het punt, waar deze beschrijvende lijn het gegeven vlak snijdt, een punt van de gevraagde doorsnede wezen. Herhaalt men deze constructie op een genoegzaam aantal punten, dan zal men, door de horizontale en verticale projectiën dezer punten behoorlijk te vereenigen, de beide projectiën der gevraagde doorsnede verkrijgen.

In fig. 135 is de doorsnede voorgesteld van een regt cirkelvormig kegelvlak met een vlak $P''PP'$, dat loodregt is op het verticale vlak. Hier is blijkbaar $F''H''$ de verticale projectie der doorsnede, terwijl derzelver horizontale projectie gevonden wordt, door de horizontale projectiën van de punten op het kegelvlak te bepalen, die hunne verticale projectiën in $F''H''$ hebben. Vereenigt men b. v. G'' met D'', dan is $D''B$ de verticale projectie van de beschrijvende lijnen, die $D'I'$ en $D'B'$ tot horizontale projectiën hebben, en het platte vlak snijden in twee punten, waarvan G'' de verticale projectie is. Trekt men dus uit G'' eene loodlijn door de as van projectie, dan zullen K' en G', waar deze loodlijn de projectiën $D'I'$ en $D'B'$ ontmoet, de horizontale projectiën dezer snijpunten, en dus van twee punten der doorsnede, wezen. Op dezelfde wijze kan men een willekeurig aantal punten van de horizontale projectie der doorsnede, en derhalve die horizontale projectie zelve, namelijk $F'G'H'K'$, bepalen.

Wil men ook hier het snijdende vlak om een' van deszelfs doorgangen op het overeenkomstige projectievlak, b. v. om den verticalen doorgang op het verticale vlak, nederslaan, ten einde de gevondene doorsnede in derzelver ware gedaante en grootte te leeren kennen, dan merke men op, dat, aangezien het snijdende vlak loodregt is op het verticale vlak, de afstanden $G'L$, $K'L$ enz., waarop de punten der doorsnede zich van het verticale vlak bevinden, te gelijkertijd de stralen der cirkels zijn, welke door die punten worden beschreven, wanneer de doorsnede op het verticale vlak wordt nedergeslagen. Stelt men derhalve op $P''P$, de loodlijnen $G''G = G'L$, en $G''K = K'L$, dan zijn G en K twee punten van de ne-

dergeslagene doorsnede. Slaat men op dezelfde wijze nog meer punten om, dan verkrijgt men door derzelver verbinding de omgeslagene doorsnede FGHK zelve. (Men vergelijke hiermede § 164.)

Even gemakkelijk kan de doorsnede op het horizontale vlak worden nedergeslagen. De stralen der cirkels, die alsdan door elk der punten van de doorsnede worden doorloopen, liggen alle, volgens derzelver ware grootten, in den doorgang P″*P*.

§ 347. Het kan gebeuren, dat de beide projectiën van de doorsnede eens kegelvlaks met een plat vlak oneindig voortloopen, ofschoon de rigtlijn eene geslotene kromme lijn is.

Wanneer het snijdende vlak door den top des kegelvlaks gaat, dan zal dit vlak het kegelvlak of alleen in den top, of volgens regte lijnen snijden. Ligt de rigtlijn des kegelvlaks in het horizontale vlak, dan worden deze doorsnijdingen gevonden, door de beschrijvende lijnen te construeren, die voortkomen uit de punten, waarin de horizontale doorgang van het platte vlak de rigtlijn snijdt.

§ 348. Werkstuk. *De doorsnede te bepalen van een plat vlak met een omwentelingsvlak, waarvan de as loodregt staat op het horizontale vlak.*

Men kan zich dit omwentelingsvlak verbeelden, als ontstaan te zijn door de beweging van eenen horizontalen cirkel (§ 321); bepaalt men dus, in verschillende standen, de punten, waarin deze bewegende cirkel het platte vlak snijdt, dan zullen deze snijpunten klaarblijkelijk tot de begeerde doorsnede behooren. Om de achtervolgende standen van den bewegenden cirkel te bepalen, snijde men het gebogene oppervlak door vlakken, die loodregt staan op de omwentelingsas, en dus evenwijdig zijn aan het horizontale vlak. Elke doorsnede van zulk een snijdend vlak met het omwentelingsvlak zal alsdan eenigen stand van den bewegenden cirkel aanwijzen, waarvan men de beide projectiën gemakkelijk kan construeren. Bepaalt men nu ook de lijn, volgens welke zulk een snijdend vlak het gegeven platte vlak snijdt, dan zullen de punten, waarin deze lijn den overeenkomstigen cirkel snijdt, tevens de punten zijn, waarin die cirkel het gegevene platte vlak snijdt, en dus tot de begeerde doorsnede behooren. Deze bewerking op een genoegzaam aantal snijdende vlakken herhalende, zal men, door de horizontale en verticale projectiën van de gevondene snijpunten behoorlijk te vereenigen, de begeerde doorsnede verkrijgen.

Laat b. v. A′B′C′ en A″D″R″E″ (fig. 137) de beide projectiën zijn van het omwentelingsvlak, waarvan de as (E″D″,D′) loodregt staat op het horizontale vlak, en zij P″*P*P′ het gegeven platte vlak. Om nu de doorsnede van dit platte vlak met het omwentelingsvlak te bepalen, trekke men eene lijn L″K″ evenwijdig aan de as van projectie, dan is deze lijn de verticale doorgang van een vlak, dat evenwijdig is aan het horizontale vlak, en dat het omwentelingsvlak snijdt volgens eenen cirkel, die L″R″ tot verticale projectie, en den cirkel, uit D′ met D′I′ = L″M″ als straal beschreven, tot horizontale projectie heeft. Verder is (*K*I′, K″L″) de lijn, volgens welke het snijdende vlak het vlak P″*P*P′ snijdt (§ 74). Daar nu *K*I′ de horizontale projectie van den cirkel in de punten I′ en N′ snijdt, zoo zijn deze de horizontale projectiën van twee punten der begeerde doorsnede; trekt men dus uit I′ en N′ loodlijnen door de as

van projectie, dan zullen I″ en N″, waar deze loodlijnen de lijn L′R″ ontmoeten, de verticale projectiën dezer punten wezen. Zoekt men op dezelfde wijze nog meer punten van de doorsnede, dan zal men, door deze behoorlijk te vereenigen, de projectiën I′B′C′N′ en I″B″C″N″ der doorsnede verkrijgen.

Wil men vooraf de grenzen bepalen, waar binnen in dit geval de snijdende vlakken moeten genomen worden, om punten der gemeene doorsnede te verkrijgen, dan brenge men door de omwentelingsas een vlak, loodregt op den horizontalen doorgang des gegevenen vlaks, en men sla dit vlak, met al, wat er zich in bevindt, om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak.

Tot oefening onderzoeke men eens, hoe men terstond de punten kan vinden, waarin de verticale projectie der doorsnede de verticale projectie A″D″R″E″ van het omwentelingsvlak aanraakt.

Het omslaan van het snijdende vlak, met de daarin gelegene doorsnede, op een der projectievlakken, geschiedt zoo als gewoonlijk.

§ 349. Hoe de doorsnede geconstrueerd wordt van een omwentelingsvlak met een plat vlak, dat door de omwentelingsas gaat, is reeds in § 326 verklaard.

§ 350. Werkstuk. *De doorsnede te construeren van een plat vlak met een scheef oppervlak.*

Bepaalt men, overeenkomstig den aard van het scheef oppervlak, een genoegzaam aantal standen van deszelfs beschrijvende lijn, en construeert men de punten, waar deze beschrijvende lijnen het gegeven vlak snijden, dan zal de behoorlijke vereeniging dezer snijpunten de begeerde doorsnede opleveren.

Laat b. v. de doorsnede begeerd worden van het scheef oppervlak, dat in § 318 is behandeld, en in fig. 126 is voorgesteld, met een vlak, dat loodregt staat op het horizontale vlak, en B′C′ tot horizontalen doorgang heeft, dan is klaarblijkelijk B′C′ de horizontale projectie dezer doorsnede, terwijl N′, O′ enz. de horizontale projectiën zijn van die punten der doorsnede, waarin de beschrijvende lijnen (E′F′, E″F″), (G′H′, G″H″), enz. het vlak snijden. Trekt men dus uit N′, O′, enz. loodlijnen door de as van projectie, dan zullen N″, O″, enz., waar deze loodlijnen de verticale projectiën E″F″, G″H″ enz. snijden, de verticale projectiën dezer snijpunten wezen, en door deze te vereenigen, verkrijgt men de verticale projectie C′N″O″ . . . . . B″ der begeerde doorsnede.

Wordt het snijdende vlak om den horizontalen doorgang op het horizontale vlak nedergeslagen, dan zal men, door de lijnen N′N, O′O, enz. loodregt op B′C′ te stellen, en dezelve achtervolgens gelijk te maken aan N″*R*, O″*S* enz., de omgeslagene doorsnede C′NOPB′ verkrijgen.

OVER DE ONDERLINGE DOORSNIJDING DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

§ 351. Ook ter bepaling der gemeene doorsnede van twee gebogene oppervlakken, is de aangenomene voorstellingswijze dezer oppervlakken zeer geschikt. Men denke zich namelijk ergens binnen de grenzen der doorsnede eenig plat vlak, dat b. v. evenwijdig is aan het horizontale

vlak, dan zal hetzelve beide gebogene oppervlakken snijden, en dewijl deze doorsneden in een zelfde vlak liggen, en zich bevinden op de plaats van de doorsnede der gebogene oppervlakken, zoo zullen zij ook elkander snijden. De punten, waarin dit plaats vindt, zijn nu klaarblijkelijk punten van beide gebogene oppervlakken, en behooren alzoo tot derzelver gemeene doorsnede. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken binnen de grenzen der doorsnede van de gebogene oppervlakken aan te nemen, zal men nu eene menigte punten kunnen bepalen, die aan beide oppervlakken gemeen zijn, en daardoor de gemeene doorsnede dezer oppervlakken zelve.

Hieruit blijkt ten duidelijkste, dat het, bij de bepaling der gemeene doorsnede van gebogene oppervlakken, vooral van belang is, om aan de snijdende vlakken zoodanige standen te geven, dat de projectiën van derzelver doorsneden met de gebogene oppervlakken gemakkelijk te construeren zijn. Daartoe behoort echter, zoo als men ligtelijk inziet, dat deze doorsneden zelven regte lijnen worden, of wel cirkels, die evenwijdig zijn aan een der projectievlakken. Waar zulks derhalve mogelijk is, moet men de snijdende vlakken zoodanig aannemen, dat hunne doorsneden met de gebogene oppervlakken aan deze voorwaarden voldoen. Of en in welke gevallen dit echter geschieden kan, hangt geheel en al af van den aard der gebogene oppervlakken, alsmede van derzelver stand, ten opzigte van de vlakken van projectie. Bij de keus dezer snijdende vlakken moet men voornamelijk de wording der gebogene oppervlakken, die men beschouwt, in aanmerking nemen, dewijl zich daaruit laat afleiden, of er, bij den gegevenen stand der gebogene oppervlakken, regte of cirkelvormige doorsneden mogelijk zijn.

Er zijn echter ook gevallen, waarin men, in plaats van platte vlakken, gebogene vlakken tot snijdende vlakken aanneemt. Zoo is het, b. v. verkiesselijk, om ter bepaling van de doorsnede van twee omwentelingsvlakken, welker omwentelingsassen elkander snijden, tot snijdende vlakken bolvormige oppervlakken aan te nemen, die hunne middelpunten in het snijpunt der assen hebben. Deze bolvormige oppervlakken snijden alsdan de beide omwentelingsvlakken volgens cirkels, welker vlakken loodregt op de omwentelingsassen staan, en welker middelpunten in die assen gelegen zijn. De snijpunten van twee zulke cirkels, die op hetzelfde bolvormig oppervlak liggen, behooren alsdan tot beide omwentelingsvlakken, en zullen derhalve punten van derzelver gemeene doorsnede wezen (§ 372).

§ 352. Werkstuk. *De doorsnede van twee cilindervlakken te bepalen.*

Men verbeelde zich een vlak, dat evenwijdig is aan de beide beschrijvende lijnen der cilindervlakken, en dat beide deze oppervlakken snijdt; dit vlak zal de cilindervlakken snijden volgens beschrijvende lijnen, en de punten, waarin deze beschrijvende lijnen elkander snijden, zullen klaarblijkelijk punten van de begeerde doorsnede wezen. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken aan te nemen, zal men een genoegzaam aantal punten der doorsnede kunnen bepalen, en door deze punten behoorlijk met elkander te vereenigen, verkrijgt men de begeerde doorsnede zelve. Het is klaar, dat deze doorsnede uit eene enkele kromme lijn, of uit twee kromme lijnen zal bestaan, naarmate het eene cilin-

dervlak het andere slechts aan eene zijde doorsnijdt, of hetzelve geheel en al doorboort.

Om een vlak te bepalen, dat evenwijdig is aan beide beschrijvende lijnen der cilindervlakken, neme men een willekeurig punt in de ruimte aan, en trekke uit hetzelve twee lijnen, die evenwijdig zijn aan de rigtingen van de beschrijvende lijnen der cilindervlakken; het vlak, dat door deze twee lijnen gaat, zal dan het begeerde wezen. Snijdt dit vlak de beide cilindervlakken, dan kan het dienen, om punten der gevraagde doorsnede te bepalen; overigens moeten al de snijdende vlakken evenwijdig aan dit vlak genomen worden.

Laat b. v. $(d'l'e'k', acij''s'')$ (fig. 138) het eene, en $(q'm'n'o', ilp''q'')$ het andere cilindervlak zijn, dan trekke men uit een willekeurig punt (r, r'') eene lijn $(rs', r''s)$ evenwijdig aan de eene, en tevens eene lijn $(rt', r''t)$ evenwijdig aan de andere beschrijvende lijn; deze lijnen snijden het horizontale vlak in s' en t', derhalve is $s't'$ de horizontale doorgang van een vlak, dat evenwijdig is aan beide beschrijvende lijnen. Dit vlak snijdt het eerste cilindervlak volgens de lijnen $(u'v', uv'')$ en $(w'x', wx'')$, en het tweede volgens de lijnen $(y'z', yz'')$ en $(a'v', av'')$; de vier snijpunten (z', z''), (v', v''), (b', b'') en (x', x'') dezer vier lijnen zijn nu blijkbaar punten van de begeerde doorsnede der oppervlakken, dewijl zij te gelijkertijd op beide deze oppervlakken gelegen zijn.

Het is niet noodig, de verticale projectiën dezer beschrijvende lijnen alle te trekken; twee derzelve b. v. uv'' en wx'' zijn voldoende. Trekt men namelijk uit de horizontale projectiën z', v', x' en b', loodlijnen door de as van projectie, dan zullen deze loodlijnen, door derzelver snijding met uv'' en wx'', de verticale projectiën z'', v'', x'' en b'' bepalen. Daar men overigens altijd dezelfde punten moet verkrijgen, zoo kan de eene handelwijze tot beproevingsmiddel van de andere dienen.

Om meer punten van de doorsnede te bepalen, behoeft men slechts vlakken te brengen, die evenwijdig zijn aan het vlak, dat $s't'$ tot horizontalen doorgang heeft, en waarvan dus de horizontale doorgangen evenwijdig zijn aan $s't'$. Trekt men b. v. $p'd'$ evenwijdig aan $s't'$, en uit de punten p', f', c' en d', waarin deze lijn de rigtlijnen der cilindervlakken snijdt, de lijnen $p'g'$, $f'h'$, $c'g'$ en $d'h'$, evenwijdig aan de horizontale projectiën van de overeenkomstige beschrijvende lijnen, dan zullen de vier snijpunten i', g', h' en k' de horizontale projectiën van vier nieuwe punten der doorsnede wezen, waarvan de verticale projectiën i'', g'', h'' en k'' even als boven bepaald worden.

De behoorlijke vereeniging der gevondene punten vordert eenige opletendheid. Men zal weldoen, de evenwijdige doorgangen der snijdende vlakken in zekere orde op elkander te laten volgen, en zich derzelver doorsneden met de gebogene vlakken zoo duidelijk mogelijk in de ruimte voor te stellen. Wat betreft de deelen der projectiën die scherp geteekend of gestippeld moeten worden, handelt men volgens hetgeen daaromtrent in § 343 is opgemerkt. In de horizontale projectie zijn namelijk alle punten zigtbaar, die doorsneden zijn van lijnen, welke van boven af gezien kunnen worden; en in de verticale projectie, wanneer die lijnen van voren zigtbaar zijn. Kan men echter deze lijnen geene van beide, of slechts eene derzelve gedeeltelijk zien, zoo is derzelver doorsnede onzigtbaar.

Overigens zij hier nog opgemerkt, dat men, om de figuur, door de menigte der lijnen, niet onduidelijk te maken, in dit en in alle dergelijke gevallen, wel zal doen, van de constructie-lijnen met potlood te trekken, en alleen de resultaten in inkt te brengen; bij het einde van elke gedeeltelijke constructie kan men alsdan de getrokkene potloodlijnen uitvegen, en op deze wijze zal de menigte van lijnen nooit verwarring kunnen veroorzaken.

§ 353. Wanneer de eerste doorgang $s't'$ de beide rigtlijnen der cilindervlakken niet snijdt, dan trekke men eene lijn, evenwijdig aan denzelven, die hieraan voldoet, en handele daarmede als met den doorgang $s't'$. Kan men geenen doorgang trekken, die evenwijdig is met $s't'$, en beide rigtlijnen te gelijkertijd snijdt, dan toont dit aan, dat de beide cilindervlakken elkander niet snijden. Kan men, evenwijdig aan $s't'$, geenen doorgang trekken, die beide rigtlijnen snijdt, maar wel eenen, die beide rigtlijnen te gelijkertijd aanraakt, dan zal zulks aantoonen, dat de cilindervlakken elkander aanraken, en het raakpunt of de raakpunten worden alsdan door de boven opgegevene constructie bepaald. Kunnen aan de rigtlijn van het eene cilindervlak twee raaklijnen getrokken worden, die evenwijdig zijn aan $s't'$, en die beide de rigtlijn van het andere cilindervlak snijden, dan doorboort het eene cilindervlak het andere, en er bestaan alsdan twee doorsnijdingskrommen, welker punten in de constructie behoorlijk van elkander moeten worden onderscheiden; in het andere geval zal er slechts ééne bestaan.

Men zal overigens gemakkelijk inzien, hoe men, indien er doorboring of doorsnijding plaats vindt, vooraf de grenzen kan bepalen, waar binnen de horizontale doorgangen der snijdende vlakken moeten genomen worden, om punten der gemeene doorsnede te verkrijgen, en wat de grenzen zijn, waar binnen de projectiën der doorsnede komen te vallen.

§ 354. Wanneer de beschrijvende lijnen van twee cilindervlakken evenwijdig gegeven zijn met een der projectievlakken, b. v. met het horizontale, dan zullen, als de rigtlijnen in het verticale vlak gelegen zijn, al de snijdende vlakken, die de cilindervlakken volgens beschrijvende lijnen snijden, ook evenwijdig met het horizontale vlak moeten worden genomen. De horizontale projectiën dezer beschrijvende lijnen worden dan gemakkelijk bepaald, terwijl derzelver verticale projectiën steeds gelegen zullen wezen in de verticale doorgangen der snijdende vlakken.

§ 355. Hebben twee cilindervlakken cirkels tot rigtlijnen, die in een der projectievlakken, b. v. in het horizontale gelegen zijn, dan zullen ook alle doorsneden dezer cilindervlakken met vlakken, die evenwijdig zijn aan het horizontale vlak, cirkels wezen. Om deze cirkels te projecteren, zoeke men slechts de horizontale projectie van het punt, waar de as van een'der cilinders zulk een snijdend vlak ontmoet, en beschrijve uit deze projectie, met den straal der overeenkomstige rigtlijn, eenen cirkel; de horizontale projectie van den cirkel, die de doorsnede is van het snijdende vlak met den anderen cilinder, wordt op eene dergelijke wijze bepaald. De punten, waarin twee zulke cirkels, die tot een zelfde snijdend vlak behooren, elkander snijden, zijn alsdan horizontale projectiën van punten der begeerde doorsnede. De verticale projectiën dezer punten worden vervolgens onmiddellijk gevonden, als liggende in den verticalen

doorgang van het snijdende vlak. Door eene menigte horizontale snijdende vlakken aan te nemen, zal men op deze wijze gemakkelijk de doorsnede der beide cilindervlakken kunnen bepalen. Wanneer de projectiën van twee cirkels, die tot hetzelfde snijdende vlak behooren, elkander niet snijden, dan toont dit aan, dat de gebogene oppervlakken, ter plaatse, waar dit snijdende vlak gebragt is, elkander ook niet snijden.

§ 356. Zijn de beschrijvende lijnen van twee cilindervlakken aan elkander evenwijdig, dan kunnen deze oppervlakken elkander slechts dáár snijden, waar hunne beschrijvende lijnen op elkander vallen, en dit zal dus volgens regte lijnen wezen. De punten, waarin de rigtlijnen der cilindervlakken elkander snijden, behooren alsdan tot deze doorsneden, welker projectiën gemakkelijk kunnen bepaald worden.

§ 357. Bij al hetgeen hierboven wegens de doorsnijding van twee cilindervlakken gezegd is, heeft men aangenomen, dat de rigtlijnen in een der projectievlakken gelegen zijn. Zijn de rigtlijnen in de ruimte gegeven, dan heeft men in § 296 geleerd, hoe men de doorgangen der cilindervlakken met een der projectievlakken kan bepalen, en hierna zal men dan eene der bovenopgegevene constructiën kunnen toepassen.

§ 358. Werkstuk. *De doorsnede van twee kegelvlakken te bepalen.*

Om deze doorsnede op de gemakkelijkste wijze te bepalen, verbeelde men zich een vlak, dat beide kegelvlakken volgens beschrijvende lijnen snijdt, dan is het klaar, dat de punten, waar de beschrijvende lijnen van het eene kegelvlak, die van het andere snijden, punten van de begeerde doorsnede zullen wezen; want zij bevinden zich te gelijkertijd op beide oppervlakken. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken aan te nemen, en de gevondene punten behoorlijk met elkander te vereenigen, zal men dus de begeerde doorsnede zelve bekomen. Daar nu alle vlakken, die een kegelvlak volgens beschrijvende lijnen snijden, door deszelfs top gaan, zoo moeten deze hulpvlakken door de toppen van beide kegelvlakken gebragt worden, dat is, door de lijn, die deze toppen vereenigt, en wel zoodanig, dat elk derzelve de beide kegelvlakken snijdt.

Dewijl al die snijdende vlakken door eene zelfde lijn moeten gaan, zoo zullen hunne doorgangen met een zelfde vlak ook alle door het punt gaan, waar die lijn dat vlak ontmoet. Onderstelt men dus, dat de rigtlijnen van beide kegelvlakken in het horizontale vlak gegeven zijn, dan zal men, om de snijdende vlakken te bepalen, het punt moeten construeren, waar de lijn, die de toppen der kegelvlakken vereenigt, het horizontale vlak ontmoet; en uit dit punt lijnen trekkende, die de beide rigtlijnen snijden, zal elk dezer lijnen de horizontale doorgang wezen van een der snijdende vlakken. Door de punten, waarin zulk een doorgang elk der rigtlijnen snijdt, met den overeenkomstigen top te vereenigen, verkrijgt men de beschrijvende lijnen, volgens welke de kegelvlakken door het overeenkomstig snijdend vlak gesneden worden, en de snijpunten dezer beschrijvende lijnen zijn alsdan punten van de begeerde doorsnede.

§ 359. Kan er uit het punt, waar de lijn, die door de toppen gaat, het horizontale vlak ontmoet, geene lijn getrokken worden, die de beide rigtlijnen snijdt, dan bewijst dit, dat de beide kegelvlakken elkander niet snijden. Kan er uit dit punt geene lijn getrokken worden, die de

beide rigtlijnen snijdt, maar wel eene lijn, die de beide rigtlijnen aanraakt, dan zal dit een bewijs zijn, dat de kegelvlakken elkander aanraken, en de opgegevene constructie zal dan het raakpunt of de raakpunten leeren kennen. Mogt de lijn, die door de beide toppen gaat, evenwijdig loopen met het horizontale vlak, dan moeten de horizontale doorgangen der snijdende vlakken alle evenwijdig getrokken worden met de horizontale projectie dezer lijn.

§ 360. Hebben de twee kegelvlakken cirkels tot rigtlijnen, die in een der projectievlakken, b. v. in het horizontale, gelegen zijn, dan zal men van horizontale snijdende vlakken gebruik kunnen maken. Om de cirkels te projecteren, volgens welke deze vlakken de kegelvlakken alsdan snijden, zoeke men slechts de horizontale projectie van het punt, waar de as van een' der kegels zulk een snijdend vlak ontmoet, en beschrijve uit deze projectie een' cirkel, met een' straal, die gelijk is aan dat gedeelte van den verticalen doorgang des snijdenden vlaks, hetwelk begrepen is tusschen de verticale projectie van bovengenoemd snijpunt en een' der grenzen van de verticale projectie des kegelvlaks. De horizontale projectie van den cirkel, die de doorsnede is van het snijdende vlak met den anderen kegel, wordt op eene dergelijke wijze bepaald. De punten, waarin twee zulke cirkels, die tot een zelfde snijdend vlak behooren, elkander snijden, zijn alsdan horizontale projectiën van punten der begeerde doorsnede; de verticale projectiën dezer punten liggen in den verticalen doorgang des snijdenden vlaks. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken aan te nemen, zal men de begeerde doorsnede zelve bekomen.

§ 361. Zijn de rigtlijnen der kegelvlakken niet in een der projectievlakken, maar in de ruimte gegeven, dan heeft men in § 305 geleerd hoe men de doorgangen der kegelvlakken met een der projectievlakken kan bepalen, en hierna zal men dan eene der bovenopgegevene constructiën kunnen toepassen.

§ 362. Werkstuk. *De doorsnede te bepalen van een cilindervlak met een kegelvlak.*

Verbeeldt men zich een vlak, hetwelk beide gegevene oppervlakken volgens beschrijvende lijnen snijdt, dan zullen de punten, waarin de beschrijvende lijnen van het cilindervlak die van het kegelvlak snijden, blijkbaar tot de gezochte doorsnede behooren, want zij bevinden zich te gelijkertijd op beide oppervlakken. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken aan te nemen, zal men dus de begeerde doorsnede kunnen bepalen. Dewijl nu het kegelvlak slechts door vlakken, welke door dezelfs top gaan, volgens beschrijvende lijnen gesneden wordt, zoo moeten al deze snijdende vlakken door dit punt gebragt worden, en wel zoodanig, dat zij ook het cilindervlak volgens beschrijvende lijnen snijden, derhalve evenwijdig zijn aan de rigting der beschrijvende lijnen van dit oppervlak. Trekt men dus door den top des kegelvlaks eene lijn, die evenwijdig is aan de beschrijvende lijnen des cilindervlaks, dan moet deze lijn in al de snijdende vlakken gelegen zijn, en hunne doorgangen met een zelfde vlak zullen derhalve alle door het punt gaan, waar die lijn dat vlak ontmoet.

Onderstelt men alzoo, dat de rigtlijnen van beide oppervlakken in het

horizontale vlak gegeven zijn, dan zal men, om de snijdende vlakken te bepalen, het punt moeten construeren, waar de lijn, die uit den top des kegelvlaks evenwijdig aan de beschrijvende lijnen des cilindervlaks getrokken wordt, het horizontale vlak ontmoet, en uit dit punt lijnen trekkende, die de beide rigtlijnen snijden, zal elk dezer lijnen de horizontale doorgang van een der snijdende vlakken wezen. Door uit de punten waarin zulk een doorgang de rigtlijn des kegelvlaks snijdt, lijnen te trekken naar deszelfs top, en uit de snijpunten met de rigtlijn des cilindervlaks lijnen te trekken, evenwijdig aan de rigting van deszelfs beschrijvende lijnen verkrijgt men de beschrijvende lijnen, volgens welke de beide oppervlakken door het overeenkomstig snijdende vlak gesneden worden, en de snijpunten dezer beschrijvende lijnen zijn alsdan punten van de begeerde doorsnede.

§ 363. Kan er uit het punt, waar de lijn, die uit den top des kegelvlaks evenwijdig aan de beschrijvende lijnen des cilindervlaks getrokken is, het horizontale vlak ontmoet, geene lijn getrokken worden, die de beide rigtlijnen snijdt, dan bewijst dit, dat de beide oppervlakken elkander niet snijden. Kan er uit dit punt geene lijn getrokken worden, die de beide rigtlijnen snijdt, maar wel eene lijn, die ze beide aanraakt, dan zal dit een bewijs zijn, dat de oppervlakken elkander aanraken, en de opgegevenene constructie leert alsdan het raakpunt of de raakpunten kennen.

§ 364. Staat de beschrijvende lijn des cilindervlaks loodregt op het projectievlak, waarin de beide rigtlijnen gegeven zijn, b. v. loodregt op het horizontale vlak, dan zal de lijn, die uit den top des kegelvlaks evenwijdig aan de beschrijvende lijnen des cilindervlaks getrokken wordt, mede loodregt staan op het horizontale vlak, en de snijdende vlakken, die door deze lijn gaan, zullen dus verticaal worden. In dit geval liggen de horizontale projectiën van de snijpunten der beschrijvende lijnen, die tot een zelfde snijdend vlak behooren, in den horizontalen doorgang dezes vlaks.

§ 365. Hebben de twee oppervlakken cirkels tot rigtlijnen, die in een der projectievlakken, b. v. in het horizontale, gelegen zijn, dan zal men van horizontale snijdende vlakken gebruik kunnen maken; de projectiën van de cirkels, volgens welke de oppervlakken door die snijdende vlakken gesneden worden, zal men dan weder volgens § 355 en § 360 kunnen construeren.

§ 366. Zijn de rigtlijnen der oppervlakken niet in een der projectievlakken, maar in de ruimte gegeven; dan heeft men in § 296 en § 305 geleerd, hoe men de doorgangen dezer oppervlakken met een der projectievlakken kan bepalen, en hierna zal men dan eene der bovenopgegevene constructiën kunnen toepassen.

§ 367. Werkstuk. *De doorsnede te bepalen van een cilindervlak met een' bol.*

Snijdt men het oppervlak des bols door een vlak, dat ook het cilindervlak snijdt, en evenwijdig is aan deszelfs beschrijvende lijnen, dan zal dit vlak den bol volgens een' cirkel, en het cilindervlak volgens beschrijvende lijnen snijden; de punten, welke deze beschrijvende lijnen en die cirkel met elkander gemeen hebben, behooren dan blijkbaar tot de begeerde doorsnede. Door eene menigte van zulke snijdende vlakken aan te nemen, zal men dus deze doorsnede zelve kunnen bepalen.

De constructie zal echter gemakkelijker worden, wanneer men die snijdende vlakken tevens loodregt aanneemt op dat projectievlak, waarin de rigtlijn des cilindervlaks gelegen is. Is b. v. de rigtlijn van het cilindervlak in het horizontale vlak gelegen, dan zal men de snijdende vlakken verticaal kunnen nemen. Elke lijn, die, evenwijdig aan de horizontale projectie der beschrijvende lijnen van het cilindervlak, zoodanig getrokken wordt, dat zij de rigtlijn van het cilindervlak en tevens de horizontale projectie van den bol snijdt, zal alsdan de horizontale doorgang van zulk een verticaal snijdend vlak wezen. Elk dezer verticale vlakken snijdt nu den bol volgens een' cirkel, waarvan het middelpunt even hoog boven het horizontale vlak ligt, als het middelpunt des bols, en waarvan de middellijn gelijk is aan de koorde, volgens welke de horizontale doorgang van het snijdend vlak de horizontale projectie van den bol snijdt.

De horizontale projectie van dezen cirkel is bovengenoemde koorde; terwijl deszelfs verticale projectie eene ellips is, waarvan de beide assen gemakkelijk kunnen bepaald worden. Om echter het construeren dezer ellipsen te ontwijken, slaat men het snijdend vlak, met al wat er zich in bevindt, om deszelfs horizontalen doorgang neder op het horizontale vlak; heeft men dan op het horizontale vlak de punten gevonden, waar de beschrijvende lijnen den cirkel snijden, dan zal men gemakkelijk kunnen bepalen, wat de projectiën dezer punten zijn, wanneer het snijdende vlak weder opgeslagen en tot deszelfs oorspronkelijken stand teruggebragt wordt.

§ 368. Is de rigtlijn van het cilindervlak in het horizontale vlak gelegen, en zijn deszelfs beschrijvende lijnen evenwijdig aan het verticale vlak, dan kunnen de verticale snijdende vlakken evenwijdig aan het verticale vlak genomen worden. In dit geval wordt de constructie zoo gemakkelijk, dat het onnoodig is, hier langer bij stil te staan.

§ 369. Wanneer de rigtlijn van het cilindervlak een cirkel is, die in een der projectievlakken, b. v. in het horizontale, ligt, dan zal men van horizontale snijdende vlakken gebruik kunnen maken, om de doormede van dit oppervlak met dat van eenen gegevenen bol te bepalen. De horizontale projectiën van de cirkels, volgens welke de beide oppervlakken alsdan door zulke vlakken gesneden worden, kan men volgens § 348 en § 355 construeren; de verticale projectiën dezer cirkels, en dus ook die van derzelver snijpunten, zijn in de verticale doorgangen der snijdende vlakken gelegen.

§ 370. Werkstuk. *De doorsnede te bepalen van een kegelvlak met een' bol.*

Ook hier make men gemakshalve gebruik van snijdende vlakken, die door den top des kegelvlaks gaan, en tevens loodregt zijn op dat projectievlak, waarin de rigtlijn gelegen is. Is b. v. de rigtlijn des kegelvlaks in het horizontale vlak gelegen, dan neme men verticale snijdende vlakken aan, die door den top des kegelvlaks gaan. Elke lijn, die uit de horizontale projectie van den top zoodanig getrokken wordt, dat zij de rigtlijn van het kegelvlak en de horizontale projectie van den bol snijdt, zal alsdan de horizontale doorgang van zulk een snijdend vlak wezen. Het overige der constructie heeft zooveel overeenkomst met die, welke in § 367 behandeld is, dat het onnoodig is, meer hierover te zeggen.

§ 371. Wanneer de rigtlijn van het kegelvlak een cirkel is, die in een

der projectievlakken, b. v. in het horizontale, ligt, dan zal m horizontale snijdende vlakken gebruik kunnen maken, om de do van dit oppervlak met dat van eenen gegevenen bol te bepal horizontale projectiën van de cirkels, volgens welke de beide opper alsdan door zulke vlakken gesneden worden, construeert men § 348 en § 360; de verticale projectiën dezer cirkels, en dus van derzelver snijpunten, zijn in de verticale doorgangen der sn vlakken gelegen.

§ 372. Werkstuk. *De doorsnede van twee omwentelingsvlakken te*

Zijn de omwentelingsassen aan elkander evenwijdig, dan kun projectievlakken altijd zoodanig worden aangenomen, dat een var b. v. het horizontale vlak, loodregt op deze assen komt te staan. men nu horizontale snijdende vlakken aan, dan zal men de volgens welke die vlakken de beide oppervlakken snijden, volgen kunnen projecteren, en de punten, waarin de cirkels, die tot h snijdend vlak behooren, elkander snijden, zullen dan punten begeerde doorsnede wezen.

Daar de bol een omwentelingslichaam is, waarvan elke mi als as kan worden aangezien, zoo kan de hier opgegevene handelwi dienen, om de doorsnede te vinden van een omwentelingsvlak r oppervlak van een' gegevenen bol.

§ 373. Snijden de assen der omwentelingsvlakken elkander, dan men gebruik van het hulpmiddel, dat in het slot van § 351 gewezen.

Laat b.v. (A′,A″B″) en (A′C′,A″C) (fig. 139) de beide assen, D″B″E en E″F″G″H″L″ de verticale projectiën van de hoofdmeridianen d wentelingsvlakken wezen; zijnde hier eenvoudigheidshalve de pr vlakken zoodanig aangenomen, dat de as van het eene oppervlak l op het eene, en de as van het andere evenwijdig met het ande jectievlak is. Neemt men nu voor snijdende vlakken eene reel bolvormige oppervlakken aan, die hunne middelpunten in het s (A′,A″) der assen hebben, dan snijden deze de beide gegevene opp ken volgens cirkels, welker vlakken loodregt staan op de overeenk assen, en de punten, waarin twee zulke cirkels, die op hetzelfd vormig oppervlak liggen, elkander snijden, behooren tot de b doorsnede, dewijl zij te gelijkertijd op de beide omwentelingsvlakk legen zijn. Het komt er derhalve slechts op aan, deze cirkels of derzelver snijpunten te bepalen.

Daar nu de cirkels loodregt op de assen, en deze evenwijdig r verticale vlak zijn, zoo zullen de cirkels ook loodregt op dit vlak Wanneer dus de cirkelboog D″I″F″H″, uit A″ beschreven, de pr der doorsnede van een bolvormig oppervlak met het vlak der as zijn D″F″ en I″H″ de projectiën van de cirkels, die daardoor op wentelingsvlakken ontstaan, en het snijpunt K″ is de verticale pr der twee punten, waarin de cirkels elkander snijden. Om de horiz projectiën K′ dezer punten te verkrijgen, behoeft men slechts uit A D″F″ als straal, eenen cirkel te beschrijven, en uit K″ eene loodlij de as van projectie te trekken. De grenspunten (E′,E″) en (G′,G doorsnede worden gemakkelijk bepaald, en andere punten worden

zelfde wijze gevonden als de punten (K′,K″). Gaat men op deze wijze voort, dan zal men de projectiën K′G′K′E′ en G″K″E″ van de doorsnede der beide oppervlakken verkrijgen. De beide helften van de verticale projectie bedekken elkander, dewijl de punten der doorsnede twee aan twee in eene lijn gelegen zijn, die loodregt is op het verticale vlak.

Ingevalle A″B″=A″L″ is, en de beschrijvende lijnen bovendien gelijk en gelijkvormig zijn, zal men gemakkelijk kunnen bewijzen, dat de verticale projectie G″K″E″ eene regte lijn wordt; de doorsnede zal alzoo in dit geval een vlakke kromme lijn zijn, en derzelver vlak zal loodregt op het verticale vlak staan.

§ 374. De behandelde voorbeelden zullen genoegzaam wezen, om een denkbeeld te geven van het bepalen der doorsnede van twee gebogene oppervlakken. Men heeft moeten opmerken, dat deze bepaling altijd mogelijk is, zoodra men in staat is, de doorsnede te projecteren van de gegevene oppervlakken met eene reeks van hulpvlakken. Hoe eenvoudiger en gemakkelijker deze projectiën kunnen geeconstrueerd worden, des te eenvoudiger en gemakkelijker zal ook de doorsnede der gebogene oppervlakken kunnen bepaald worden. Het komt er derhalve altijd op aan, om in elk bijzonder geval zulk een stelsel van hulpvlakken te kiezen, dat derzelver doorsneden met de gebogene oppervlakken zoo gemakkelijk mogelijk te projecteren zijn.

Tot oefening kan men zich nog voorstellen, de doorsnede te bepalen van een algemeen ontwikkelbaar oppervlak, waarvan de keerlijn gegeven is, met het oppervlak van een' cilinder, kegel of bol; alsmede die van dezelfde oppervlakken met een scheef oppervlak, waarvan de wording bekend is.

OVER DE ONTWIKKELING DER OPPERVLAKKEN.

§ 375. In § 333 tot 335 is verklaard, welke gebogene oppervlakke voor ontwikkeling vatbaar zijn; thans zullen wij aantoonen, hoe de ontwikkeling kan geschieden.

Het doel, dat men zich bij het ontwikkelen van een oppervlak voor stelt is, om de kromme lijnen, welke op dit oppervlak zijn aangenomen of die daarop ontstaan zijn door de snijding van hetzelve met eenig plat c gebogen vlak, op een zelfde plat vlak over te brengen. Het is klaar, da men, om de ontwikkeling te kunnen volvoeren, de kromme lijnen, di men op het oppervlak beschouwt, tot zulke gegevens moet terug brengen welke bij den overgang van den gebogenen tot den vlakken toestan niet van grootte veranderen, en waarvan de betrekkelijke ligging in deze laatsten toestand gemakkelijk te bepalen is.

Men kan ook, omgekeerd, de ontwikkeling doen dienen, om kromm lijnen, die aan zekere voorwaarden moeten voldoen, op het oppervla te beschrijven. Zoo is in § 276 het oppervlak van eenen regten cirkel vormigen cilinder ontwikkeld geworden, om eene schroeflijn op hetzelv te construeren.

§ 376. Werkstuk. *Het oppervlak van eenen cilinder te ontwikkelen.*

Laat ABCD enz. (fig. 140) eene kromme lijn zijn, welke op een cilin dervlak ontstaan is door deszelfs doorsnijding met eenig ander oppervlak of door eene van de projectiën der kromme willekeurig aan te nemen en daaruit (§ 298) de andere te bepalen. Om nu het cilindervlak me de daarop gelegene kromme te ontwikkelen, en dus op een plat vla neder te leggen, snijdt men het cilindervlak door een vlak, dat loodreg is op de beschrijvende lijn, dan kan het geheele oppervlak beschouw worden, als uit regte lijnen te bestaan, die loodregt op dit vlak zijn De doorsnede PQRS enz. van dit vlak met het cilindervlak, zal in d ontwikkeling eene regte lijn worden, waarop al de beschrijvende lijne loodregt staan, omdat deze doorsnede al de beschrijvende lijnen onde gelijke hoeken, en wel onder regte hoeken, doorsnijdt.

Neemt men in deze doorsnede PQRS enz. een willekeurig punt P aan en construeert men de beschrijvende lijn PI, die door dit punt gaat dan zal het punt A bekend worden, waar deze beschrijvende lijn d gegevene kromme snijdt, en men zal dus ook den afstand PA kunne bepalen, die in de ontwikkeling niet zal veranderen. Trekt men n eene regte lijn ps, dan zal deze de doorsnede PQRS enz. in de ontwik keling voorstellen; onderstelt men dus, dat p het punt is, hetwell overeenkomt met het punt P, waardoor de beschrijvende lijn PI gaat.

bij welke men de ontwikkeling wil aanvangen, dan zal p i, loodregt op p s getrokken, deze beschrijvende lijn in de ontwikkeling voorstellen. Wordt vervolgens op p i eene lijn p a uitgezet, die gelijk is aan den gevondenen afstand PA, dan zal a het punt A in de ontwikkeling aanwijzen.

Om een tweede punt der ontwikkelde kromme te vinden, neemt men in de doorsnede PQRS enz. een punt Q aan, zoo digt bij het punt P gelegen, dat men, zoowel de horizontale als de verticale projectie van het boogje PQ, als regte lijnen kan aanmerken; en men construeert den afstand der punten P en Q. Zet men dezen afstand op p s, van p tot q uit, en trekt men q k loodregt op p s, dan zal deze loodlijn q k de beschrijvende lijn QK in de ontwikkeling voorstellen. Construeert men vervolgens de beschrijvende lijn QK, dan zal het punt B bekend worden, waar deze beschrijvende lijn de gegevene kromme snijdt, en men zal dus ook den afstand QB kunnen bepalen; neemt men nu op q k een stuk q b, gelijk aan den gevondenen afstand QB, dan zal b het punt B in de ontwikkeling aanwijzen.

Gaat men op deze wijze voort, dan zal men achtervolgens de punten c, d, enz. in de ontwikkeling kunnen bepalen, en de kromme, die door de punten a, b, c, d, enz. gaat, zal dan ten naastenbij de ontwikkeling van de gegevene kromme lijn ABCD enz. zijn.

§ 377. Ingeval de ontwikkelde kromme eene regte lijn wordt, dan blijkt daaruit, dat de kromme lijn, op het cilindervlak beschreven, eene hélice of schroeflijn is, welke wij in § 336 hebben leeren kennen.

§ 378. Dewijl men in de bovenopgegevene constructie voor de lengten der bogen PQ, QR, enz. die van derzelver koorden pq, q r, enz. heeft genomen, wordt daardoor de ontwikkeling van het oppervlak slechts op eene benaderde wijze gevonden, en dit gebrek zal blijven bestaan voor alle cilindervlakken, waarvan de kromme lijn, die de beschrijvende lijnen regthoekig doorsnijdt, niet gerectificeerd kan worden, dat is, wanneer men geene regte lijn kan vinden, welke volkomen gelijk is aan de lengte van eenigen boog dezer kromme lijn. In de toepassing op de kunsten vergenoegt men zich echter met deze kromme lijn, zoo als boven is aangetoond, in zulke kleine deelen te verdeelen, dat men elk dezer deelen, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, als eene regte lijn kan beschouwen, en het is alsdan het cilindervlak niet meer, dat ontwikkeld wordt, maar het oppervlak van een ingeschreven prisma van een zeer groot aantal zijden.

§ 379. Is de beschrijvende lijn van een cilindervlak loodregt gegeven op een der projectievlakken, dan komt de doorsnede, die loodregt door de beschrijvende lijn gaat, overeen met de rigtlijn van het cilindervlak, en dan zal deze rigtlijn in de ontwikkeling eene regte lijn worden. Voor het overige blijft de in § 376 opgegevene constructie onveranderd.

§ 380. Het eenvoudigste geval is dat, waarin de beschrijvende lijn loodregt staat op een der projectievlakken, en de rigtlijn des cilindervlaks een cirkel is.

Zoo is in fig. 132 de kromme lijn bepaald, volgens welke een regt cirkelvormig cilindervlak gesneden wordt door een plat vlak, dat loodregt staat op het verticale vlak. Wil men nu den vorm bepalen, welken deze kromme lijn aanneemt, wanneer het cilindervlak op een plat vlak

ontwikkeld wordt, dan beschrijft men (§ 276 de noot) eene regte lijn AA (fig. 133), die ten naastenbij gelijk is aan den omtrek des cirkels A'B'C enz., en men verdeelt die lijn in zoodanig aantal gelijke deelen, waarin men ook den omtrek des cirkels kan verdeelen, b. v. in twaalf. Verdeelt men nu den omtrek des cirkels in hetzelfde aantal gelijke deelen dan is het klaar, dat de cirkelbogen A'B', B'C', enz. ten naastenbij gelijk zullen wezen aan de lijnen AB, BC, enz. Trekt men vervolgens uit A, B, C, enz. loodlijnen op AA, dan zullen deze loodlijnen de ontwikkeling voorstellen van de beschrijvende lijnen, die door A', B', C' enz. gaan. Alzoo nu de afstanden, van de punten A', B', C', enz. tot daar, waar de beschrijvende lijnen, die door deze punten gaan, de kromme snijden, in dit geval gelijk zijn aan AA'', BB'', CC'', enz., zoo maakt men de loodlijnen AA, BB, CC, enz. achtervolgens gelijk aan AA'', BB'', CC'' enz., tot dat men den geheelen cilinder is rond geweest; worden vervolgens de punten A, B, C, enz. door eene kromme lijn vereenigd, dan zal deze de begeerde wezen.

§ 381. Wanneer eene kromme lijn, op een cilindervlak beschreven eene geslotene of in zich zelve wederkeerende kromme lijn is, zoo zal de ontwikkelde kromme daarom toch in zeer veel gevallen tot in het oneindige voortloopen; want wanneer een vlak zich om een' cilinder wikkelen kan men, daar dit vlak uit zijnen aard oneindig is, hetzelve zoovele maal als men wil, over zich zelven laten heenrollen. Zoo zal men b. v. in het geval der vorige §, na éénmaal den cilinder te zijn rond geweest de ontwikkeling verder kunnen voortzetten, en daardoor zal men een kromme lijn verkrijgen, die tot in het oneindige voortloopt, bestaande uit een oneindig aantal kromme lijnen, zoo als die, welke in fig. 133 geconstrueerd is, en die alle gelijk en gelijkvormig zijn.

§ 382. Wanneer men eenen massieven regten cilinder neemt, waarvan het grondvlak de cirkel A'B'C' enz. (fig. 132) is, en men fig. 133 langs de kromme lijn ABC enz. afsnijdt, vervolgens het vlak AA zoodanig om den cilinder heenwindt, dat de lijn AA op den omtrek van deszelfs grondvlak valt, dan zal de kromme lijn ABC enz. de werkelijke doorsnede voorstellen, welke in fig. 132 geconstrueerd is. Door dus met een fijne potloodstift langs de alzoo omwoelde kromme te trekken, zal men deze doorsnede op het cilindervlak kunnen teekenen.

Neemt men eenen massieven regten cilinder, waarvan het grondvlak de cirkel A'C'D' enz. (fig. 118) is, dan zal men, door den driehoek ANA uit te snijden, en op bovengenoemde wijze om den cilinder te winden op denzelven eenen schroefgang kunnen beschrijven, waarvan A'N de hoogte is; door dezen driehoek ter hoogte van den schroefgang op te schuiven, zal men eenen tweeden schroefgang kunnen verkrijgen, en zoo doende de geheele schroeflijn.

§ 383. Werkstuk. *Het oppervlak van eenen kegel te ontwikkelen.*

Laat ABCD enz. (fig. 141) eene kromme lijn wezen, welke op een kegelvlak beschreven is, door eene van de projectiën der kromme aan te nemen, en daaruit (§ 306) de andere te bepalen, of wel eene kromme lijn, die op het kegelvlak ontstaan is, door deszelfs doorsnijding met eenig ander oppervlak. Om nu het kegelvlak met de daarop gelegen kromme te ontwikkelen, en dus op een plat vlak neder te leggen, denk

men zich eene kromme lijn zoodanig op het kegelvlak beschreven, dat al derzelver punten even ver van den top des kegels afstaan, dan zal deze kromme lijn, in de ontwikkeling van het kegelvlak, een cirkel of ten minste een cirkelboog zijn, waarvan de straal de standvastige afstand is, welken al de punten der gezegde kromme lijn van den top hebben. Nu is het klaar, dat al de punten, die even ver van den top des kegels liggen, op het oppervlak van eenen bol gelegen zijn, welke zijn middelpunt in dezen top heeft. De kromme lijn, waarvan wij spreken, is dus de doorsnijding van dezen bol met het gegeven kegelvlak, en is alzoo gemakkelijk te construeren volgens § 370, of wel, door in dit geval op elk der beschrijvende lijnen, van den top af, gelijke stukken TP te nemen, en de uiteinden dezer lijnen te vereenigen; laat PQRS enz. deze kromme lijn zijn.

Neemt men in deze doorsnede PQRS enz. een willekeurig punt P aan, en construeert men de beschrijvende lijn TI, die door dit punt gaat, dan zal het punt A bekend worden, waar deze beschrijvende lijn de gegevene kromme snijdt, en men zal dus ook den afstand TA kunnen bepalen, die in de ontwikkeling niet zal veranderen. Beschrijft men nu uit t, met tp = TP als straal, eenen cirkelboog pqrs enz., dan zal deze de doorsnede PQRS enz. in de ontwikkeling voorstellen; onderstelt men dus, dat p het punt is, hetwelk overeenkomt met het punt P, waardoor de beschrijvende lijn TI gaat, bij welke men de ontwikkeling wil aanvangen, dan stelt ti deze beschrijvende lijn in de ontwikkeling voor. Wordt alzoo op ti eene lijn ta uitgezet, die gelijk is aan den gevondenen afstand TA, dan zal a het punt A in de ontwikkeling aanwijzen.

Om een tweede punt der ontwikkelde kromme te vinden, neemt men in de doorsnede PQRS enz. een punt Q aan, zoo digt bij het punt P gelegen, dat men, zoowel de horizontale, als de verticale projectie van het boogje PQ, als regte lijnen kan aanmerken, en men construeert den afstand der punten P en Q. Zet men dezen afstand, van p tot q, als koörde in den cirkelboog pqrs enz. uit, en trekt men de lijn tqk, dan zal deze lijn de beschrijvende lijn TK in de ontwikkeling voorstellen. Construeert men vervolgens de beschrijvende lijn TK, dan zal het punt B bekend worden, waar deze beschrijvende lijn de gegevene kromme snijdt, en men zal dus ook den afstand TB kunnen bepalen; neemt men nu op tk een stuk tb gelijk aan den gevondenen afstand TB, dan zal b het punt B in de ontwikkeling aanwijzen.

Gaat men op deze wijze voort, dan zal men achtervolgens de punten c, d, enz. in de ontwikkeling kunnen bepalen, en de kromme, die door de punten a, b, c, d, enz. gaat, zal dan ten naastenbij de ontwikkeling van de gegevene kromme lijn ABCD enz. zijn.

§ 384. Om de constructie naauwkeurig te doen zijn, zou men de cirkelbogen pq, qr, rs, enz. achtervolgens gelijk moeten nemen aan de lengten der bogen PQ, QR, RS, enz. van de kromme lijn PQRS enz. Men zou dus de lengten dezer bogen moeten kunnen bepalen of ten minste deze bogen tot cirkelbogen kunnen herleiden; dit is ondertusschen in het algemeen niet anders mogelijk, dan door integraalrekening, en in de meeste gevallen zelfs alleen bij benadering. In de praktijk heeft

men ondertusschen alleen tot doel, zulk eenen graad van naauwkeurigheid in de constructiën te bereiken, dat men binnen de grenzen blijft van de onvolkomenheid, die toch altijd uit de instrumenten, waarvan men zich bedient, voortvloeit; het is daarom, dat men de constructie volgt, welke in de vorige § is aangewezen, waardoor men eigenlijk, in plaats van het kegelvlak, eene piramide van zeer veel zijden ontwikkelt.

§ 385. Het eenvoudigste geval heeft plaats, wanneer het kegelvlak dat van eenen regten cirkelvormigen kegel is. In dat geval kan men, daar de straal des bols willekeurig is, voor denzelven de schuinsche zijde des kegels nemen; de doorsnede van den bol met den kegel wordt alsdan de cirkel, die de rigtlijn is van het kegelvlak.

Is nu S de schuinsche zijde, R de straal van het grondvlak des kegels, en α de hoek, dien de schuinsche zijde met de as maakt, dan wordt de omtrek des grondvlaks in de ontwikkeling een cirkelboog, waarvan de lengte gelijk is aan $\frac{R}{S} \times$ omtrek S, en waarvan de uiterste stralen eenen hoek vormen, die gelijk is aan $360^\circ \times \sin \alpha$.

Zijn R en S onderling meetbaar, zoodat derzelver betrekking door het rationaal gebroken $\frac{p}{q}$ kan voorgesteld worden, dan zal het construeren van den cirkelboog, die de ontwikkeling is van den omtrek des grondvlaks, veel vereenvoudigd worden. Is daarenboven q een der getallen, die voorkomen in de reeksen van veelhoeken, welke men in een' cirkel kan beschrijven, dan zal deze cirkelboog werkelijk meetkunstig kunnen geconstrueerd worden, en het ontwikkelen des kegelvlaks zal in dat geval streng meetkunstig kunnen geschieden; want door den cirkelboog en den omtrek van het grondvlak des kegels door onophoudelijke middendoordeeling in evenveel gelijke deelen te verdeelen, zal elk deel van den cirkelboog werkelijk gelijk zijn aan het overeenkomstige deel van den omtrek des grondvlaks.

§ 386. Laat, om een voorbeeld te geven van hetgeen in de vorige § gezegd is, gevraagd worden, om den regten cirkelvormigen kegel van fig. 135 te ontwikkelen, en dus den vorm te bepalen, welken de kromme lijn alsdan aanneemt, die op dit kegelvlak ontstaan is door de snijding van een vlak, dat loodregt staat op het verticale vlak.

Daartoe construeert men eenen hoek CDC (fig. 136), die gelijk is aan $360^\circ \times \sin AD''D$, en beschrijft, met $DC = AD''$ als straal, den cirkelboog CBAIC. Vervolgens verdeelt men den omtrek van het grondvlak des kegels door onophoudelijke middendoordeeling in een zeker aantal gelijke deelen, b. v. in acht, en den boog CBAIC in hetzelfde aantal gelijke deelen. Vereenigt men nu de deelpunten van den cirkelboog met desselfs middelpunt D, dan zullen deze lijnen de ontwikkeling voorstellen van de beschrijvende lijnen, die door de deelpunten van den omtrek des grondvlaks gaan. Op elk dezer ontwikkelde beschrijvende lijnen moeten nu, van D af aan, de afstanden worden uitgezet, die de top des kegels heeft tot aan de punten, waarin de overeenkomstige beschrijvende lijnen op het oppervlak des kegels de daarop gelegene kromme snijden. Beginnen wij alzoo de ontwikkeling bij de beschrijvende lijn, die door het punt (C', C) gaat, dan moet men de werkelijke lengte van de lijn ($D'H'$, $D''H''$)

construeren, welke blijkbaar gelijk is aan D″H″; neemt men dus op DC een stuk DH = D″H″, dan zal H het punt (H′, H″) in de ontwikkeling aanwijzen. Dewijl verder de werkelijke lengte van de lijn (D′F′, D″F″) gelijk is aan D″F″, zal men, door op DA een stuk DF = D″F″ te nemen, onmiddellijk het punt F kunnen bepalen, dat de ontwikkeling van het punt (F′, F″) voorstelt. Om nog andere punten der ontwikkeling te bekomen, b. v. het punt (G′, G″), trekke men G″g evenwijdig aan de as van projectie, dan zal D″g gelijk zijn aan de werkelijke lengte der lijn (D′G′, D″G″); wordt dus op DB een stuk DG = D″g genomen, dan zal G het punt (G′, G″) in de ontwikkeling wezen. Daar nu de werkelijke lengte van de lijn (D′K′, D″G″) insgelijks gelijk is aan D″g, zal men, door op DI, een stuk DK = D″g te nemen, tevens het punt K bepaald hebben, dat de ontwikkeling is van het punt (K′, G″).

Op deze wijze voortgaande, zal men nog meer punten van de ontwikkeling kunnen bepalen, en deze punten door eene kromme lijn vereenigende, verkrijgt men HGFKH voor de begeerde ontwikkelde kromme.

§ 387. Ook hier, even als bij den cilinder, zal men door de ontwikkeling voort te zetten, voor de ontwikkelde kromme eene kromme lijn verkrijgen, die tot in het oneindige voortloopt, en welke verkregen wordt, door den hoek CDC, met al wat zich in denzelven bevindt, een onbepaald aantal malen naast elkander te leggen. Is de hoek CDC meetbaar met vier regte hoeken, dan zal de kromme lijn in zich zelve wederkeeren.

§ 388. De kromme lijn HFH geconstrueerd zijnde, zal dezelve wederom kunnen dienen, om de kromme werkelijk op den kegel te teekenen; want men zal alsdan het papier langs deze kromme lijn moeten afsnijden, een der afgesnedene stukken CBACHFH behoorlijk om den kegel moeten vouwen, en eindelijk met eene fijne stift de kromme lijn langs deze omgewoelde lijn moeten teekenen.

§ 389. Werkstuk. *Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak bij benadering te ontwikkelen.*

Laat (A′B′C′D′E′, A″B″C″D″E″) (fig. 142) de keerlijn wezen van het oppervlak, en P′Q′R′S′ de horizontale projectie van eenige kromme lijn, op het oppervlak beschreven. Om nu vooreerst de verticale projectie dezer kromme te bepalen, neemt men in de keerlijn de punten (A′, A″), (B′, B″), enz. zoodanig aan, dat de koorden ten naastenbij met de bogen overeenkomen, en men verlengt de koorden (A′B′, A″B″), (B′C′, B″C″), enz. onbepaaldelijk; uit de punten P′, Q′ enz., waarin de horizontale projectie P′Q′R′S′ door de lijnen A′B′, B′C′, enz. gesneden wordt, trekke men loodlijnen door de as tot aan de overeenkomstige lijnen A″B″, B″C″, enz., dan wordt hierdoor de verticale projectie P″Q″R″S″ ten naastenbij bepaald. Om nu het oppervlak met de daarop gelegene kromme te ontwikkelen, trekt men eene willekeurige lijn AP, en beschrijft op dezelve den driehoek BPQ, gelijk en gelijkvormig met den driehoek (B′P′Q′, B″P″Q″). Vervolgens neemt men BC gelijk aan de lijn (B′C′, B″C″), en men beschrijft op CQ den driehoek CQR, gelijk en gelijkvormig met den driehoek (C′Q′R′, C″Q″R″). Op deze wijze voortgaande, zal PQRS enz. meer en meer naauwkeurig de ontwikkeling van de voorgestelde kromme zijn, naarmate men meer punten in de keerlijn heeft aangenomen.

OVER DE RAKENDE VLAKKEN AAN DE GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

§ 390. Even zoo als elke kromme lijn kan beschouwd worden, als uit een oneindig aantal oneindig-kleine regte lijnen of elementen te bestaan, zoo kan men zich ook verbeelden, dat een gebogen oppervlak uit een oneindig aantal oneindig-kleine platte vlakken bestaat, waarvan elk een element van het gebogen oppervlak is. Denkt men zich nu zoodanig element naar alle rigtingen verlengd, dan ontstaat er een plat vlak, hetwelk dit element met het gebogen oppervlak gemeen heeft. Dit platte vlak wordt een *rakend vlak* aan het gebogen oppervlak, en het element, dat zij met elkander gemeen hebben, derzelver *raakpunt* genoemd.

§ 391. Verbeeldt men zich, dat door het raakpunt een willekeurig aantal lijnen op het oppervlak getrokken zijn, en neemt men, van dit punt af aan, oneindig-kleine deelen dezer lijnen, dan zullen dezelve alle in het rakend vlak gelegen wezen. Deze deelen kunnen echter ook beschouwd worden, als regte lijnen, en door ze onbepaaldelijk te verlengen, zullen zij raaklijnen worden aan de lijnen, die op het oppervlak beschreven zijn. Daar nu elk dezer raaklijnen een oneindig-klein gedeelte harer rigting in het rakend vlak heeft liggen, zoo ligt zij er geheel en al in. Het rakend vlak aan eenig gebogen oppervlak bevat derhalve al de raaklijnen, die in het raakpunt kunnen getrokken worden aan al de lijnen, die men door dit punt op het oppervlak kan beschrijven.

§ 392. Het voorgaande besluit vloeit onmiddellijk voort uit de beschouwingen, waarop de bepalingen van de raaklijn en van het rakend vlak berusten. Zie hier, hoe men zich van deze waarheid ook op eene andere wijze kan overtuigen.

Vooreerst herinnere men zich, dat als eene regte lijn eene kromme in twee punten snijdt, en men die regte lijn om een dezer punten doet draaijen, zoodanig, dat de beide snijpunten, na meer en meer tot elkander genaderd te zijn, in elkander vallen, die regte lijn alsdan een bepaalden stand verkrijgt, waarin men haar eene raaklijn noemt. Dit in aanmerking nemende, zullen wij bewijzen, dat de raaklijnen, gebragt door een punt eens oppervlaks aan de verschillende lijnen, die men door dit punt op het oppervlak kan trekken, alle gelegen zijn in een zelfde vlak; en het is dit vlak, hetwelk wij het rakend vlak zullen noemen.

Laat daartoe M (fig. 143) een willekeurig punt op het oppervlak wezen, en AA′ de beschrijvende lijn, die door dit punt gaat. Zij verder GG′ een andere stand dezer beschrijvende lijn, zoo digt als men verkiest bij AA′ gelegen, en onderstellen wij, dat N het punt zij, dat

n M komt te vallen, wanneer het den weg CC′ op het oppervlak doorloopt. Laat voorts MD eene willekeurige kromme lijn zijn, die door het punt M op het oppervlak getrokken is, en de beschrijvende lijn GG′ in P snijdt; terwijl eindelijk MR, NS en MT de snijlijnen zijn, getrokken door de punten M, N en P, twee aan twee genomen.

Verbeeldt men zich nu, dat de beschrijvende lijn GG′ meer en meer tot AA′ nadert, en eindelijk op dezelve komt te vallen, dan zullen op den oogenblik, waarin dit plaats vindt, de punten N en P in M komen te vallen, en te gelijkertijd zullen de drie snijlijnen overgaan in raaklijnen aan de drie kromme lijnen CC′, AA′ en MD. Gedurende dat nu de drie snijlijnen van stand veranderen, is er altijd een vlak, dat ze alle drie bevat; op den oogenblik, waarin zij raaklijnen worden, moeten zij derhalve nog in een zelfde vlak gelegen wezen.

Wij kunnen hieruit besluiten, dat het vlak, bepaald door de raaklijnen aan de krommen CC′ en AA′, ook de raaklijn bevat, die in het punt M aan eene willekeurige kromme, beschreven door het punt M op het oppervlak, getrokken is; zijnde een besluit, hetwelk volmaakt overeenkomt met dat van de vorige §.

§ 393. Deze stelling is van het grootste belang bij het bepalen der rakende vlakken; want daar twee lijnen voldoende zijn, om een vlak te bepalen, volgt hieruit, dat om het rakend vlak aan een gegeven punt van een oppervlak te construeren, men slechts in het raakpunt de raaklijnen behoeft te trekken aan twee lijnen, die door dit punt op het oppervlak zijn beschreven, en door deze raaklijnen een vlak te brengen.

Het is klaar, dat men op het oppervlak altijd die twee lijnen moet kiezen, welke het gemakkelijkst bepaald kunnen worden. Kan men b. v. door het gegeven raakpunt twee regte lijnen trekken, die geheel en al op het oppervlak zijn gelegen, dan zijn deze lijnen raaklijnen aan zich zelven, en bijgevolg zal het rakende vlak door deze twee regte lijnen bepaald wezen. Dit geval doet zich voor bij sommige scheeve oppervlakken, en wel bij de omwentelings-hyperboloïde met één blad, alsmede bij de hyperbolische paraboloïde. Voor het overige zal men weldra zien, dat bij elk geslacht van gebogene oppervlakken het rakend vlak bijzondere eigenschappen bezit, die deszelfs bepaling gemakkelijk maken.

§ 394. De regte lijn, welke uit het raakpunt loodregt op een rakend vlak wordt opgerigt, noemt men eene *normaallijn* of eene *normaal* van het gebogen oppervlak, en elk vlak, dat door deze lijn gaat, wordt een *normaalvlak* genoemd. De doorsnede van zulk een vlak met het gebogen oppervlak heet *normaalsnede*.

§ 395. Er kan begeerd worden, een rakend vlak aan een gebogen oppervlak te brengen: 1°. door een gegeven punt op het oppervlak; 2°. door een gegeven punt buiten het oppervlak; 3°. door eene gegevene lijn; 4°. evenwijdig aan eene gegevene lijn. Eindelijk kan ook begeerd worden, om een vlak te bepalen, dat te gelijkertijd rakend vlak is aan meer gebogene oppervlakken. Deze gevallen zullen nu achtervolgens op de voornaamste gebogene oppervlakken worden toegepast.

§ 396. Werkstuk. *Door een gegeven punt, op een gegeven cilindervlak, een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Zij (A′C′E′F′, *BD*H″G″) (fig. 144) het gegeven cilindervlak, en I′ de

horizontale projectie van het gegeven punt op hetzelve, dan kan m
volgens § 299 deszelfs verticale projectie I″ bepalen. Trekt men nu do
het punt (I′, I″) de beschrijvende lijn (I′K′, I″K), dan moet deze lij
die met het gevraagde vlak het punt (I′,I″) gemeen heeft, zonder d
vlak te snijden, geheel in dit vlak gelegen wezen; het snijpunt K′ dez
lijn met het horizontale vlak moet derhalve een punt van den horizo
talen doorgang van het rakende vlak zijn. Dewijl verder deze doo
gang met de rigtlijn A′B′C′D′ in hetzelfde vlak ligt, het punt K′ m
die rigtlijn gemeen heeft, en dezelve niet snijden mag, daar ande
ook het oppervlak door het gevraagde vlak zou gesneden worden, z
moet deze doorgang raaklijn wezen aan de rigtlijn A′B′C′D′ van h
cilindervlak. Trekt men derhalve door K′ de raaklijn K′M aan A′B′C′I
dan zal deze raaklijn de horizontale doorgang van het rakende vlak, e
M een punt van deszelfs verticalen doorgang wezen. Om een tweede pu
van den verticalen doorgang te bepalen, zoekt men het punt, waar e
lijn (I′K′, I″K) het verticale vlak ontmoet. Valt echter dit punt buite
de teekening, dan brenge men door eenig punt (I′, I″) van het gevraag
vlak, in hetzelve, eene lijn (I′L, I″L″), die evenwijdig loopt aan h
horizontale vlak, door I′L evenwijdig aan K′M, en I″L″ evenwijdig a
MD te trekken (§ 37); het snijpunt L″ dezer lijn met het verticale vl
is dan ook een punt van den verticalen doorgang des rakenden vlak
en derhalve ML″ deze doorgang zelf.

§ 397. De horizontale lijn (I′L, I″L″) is blijkbaar niet anders dan e
raaklijn aan de beschrijvende lijn A′B′C′D′, in den stand, dien zij heef
wanneer zij door het punt (I′,I″) gaat. De raaklijn aan de andere b
schrijvende lijn, namelijk aan (I′K′, I″K), valt op deze lijn zelv
en men ziet derhalve, dat de algemeene leerwijze van § 393 hier we
kelijk is toegepast geworden.

§ 398. Uit bovenstaande oplossing blijkt, dat als een cilindervlak e
een vlak, dat hetzelve aanraakt, door een ander vlak gesneden worde
mits dit vlak het cilindervlak niet snijdt volgens beschrijvende lijne
de doorsnede met het rakende vlak eene raaklijn zal wezen aan de doo
snede met het cilindervlak. Immers is hier de horizontale doorgang v
het rakende vlak eene raaklijn aan den horizontalen doorgang van h
cilindervlak.

§ 399. Is de rigtlijn van een cilindervlak door hare beide projecti
gegeven, dan zal het rakende vlak bepaald worden door de beschrijven
lijn, die door het gegeven punt gaat, en door de raaklijn, die men a
de rigtlijn kan trekken, in het punt, dat deze beschrijvende lijn m
de rigtlijn gemeen heeft.

§ 400. Werkstuk. *Door een gegeven punt, buiten een gegeven cilinde
vlak, een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Hiertoe merkt men op, dat elk rakend vlak het cilindervlak volge
eene beschrijvende lijn aanraakt (§ 396). Trekt men dus door het g
geven punt eene lijn, evenwijdig aan de beschrijvende lijn des cilinde
vlaks, dan zal deze lijn in het begeerde rakende vlak moeten liggen, e
de punten, waarin deze lijn de beide projectievlakken ontmoet, zijn d
halve punten van de beide doorgangen dezes vlaks. Daar verder de h
rizontale doorgang van het rakende vlak den horizontalen doorgang d

cilindervlaks aanraakt (§ 396), zoo zal men, als de rigtlijn in het horizontale vlak gegeven is, den horizontalen doorgang van het rakende vlak bekomen, door uit het reeds bepaalde punt van dien horizontalen doorgang eene raaklijn aan de rigtlijn te trekken. Het punt, waar deze doorgang de as snijdt, is een punt van den verticalen doorgang, en door dit te vereenigen met het reeds bepaalde punt van dien doorgang, zal men den verticalen doorgang van het rakende vlak verkrijgen.

Het is klaar, dat er even zoo veel rakende vlakken zullen bestaan, die aan de vraag beantwoorden, als er raaklijnen aan de rigtlijn kunnen getrokken worden, uit het eerst bepaalde punt van den horizontalen doorgang.

§ 401. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn, buiten een gegeven cilindervlak, een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Dewijl de cilindervlakken door rakende vlakken volgens regte lijnen worden aangeraakt, zoo kan zulk een vlak niet nog te gelijkertijd door eene andere willekeurige lijn gaan; dat is, men kan niet door elke lijn, buiten een cilindervlak, een rakend vlak aan hetzelve brengen. Of zulks echter in een gegeven geval mogelijk is, ontdekt men gemakkelijk op de volgende wijze. Het snijpunt van de gegevene lijn met het horizontale vlak, is blijkbaar een punt van den begeerden horizontalen doorgang, en daar deze doorgang tevens raaklijn moet wezen aan de rigtlijn, zoo kan hij gemakkelijk bepaald worden. Het punt, waar deze raaklijn de rigtlijn aanraakt, is een punt der beschrijvende lijn, volgens welke het cilindervlak aangeraakt wordt door een vlak, hetwelk deze raaklijn tot doorgang heeft. Construeert men dus de beschrijvende lijn, die door dit raakpunt gaat, en ligt deze beschrijvende lijn met de gegevene lijn in een zelfde vlak, dat is, snijdt zij de gegevene lijn, of is zij met dezelve evenwijdig, dan is het vlak, dat door deze beide lijnen kan gebragt worden, het begeerde; in het tegenovergestelde geval kan er door de gegevene lijn geen rakend vlak aan het cilindervlak gebragt worden.

§ 402. Werkstuk. *Aan een gegeven cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat evenwijdig is aan eene gegevene lijn.*

Trekt men door een willekeurig punt van de gegevene lijn, eene lijn, die evenwijdig is aan de beschrijvende lijn des cilindervlaks, en bepaalt men de doorgangen van het vlak, dat door deze beide lijnen kan gebragt worden, dan zal het begeerde rakende vlak evenwijdig moeten zijn aan dit hulpvlak, dewijl het dan ook evenwijdig zal zijn aan de daarin liggende gegevene lijn. De doorgangen van het rakende vlak moeten derhalve evenwijdig zijn aan die van dit hulpvlak. Daar nu bovendien de horizontale doorgang van het begeerde rakende vlak eene raaklijn moet wezen aan de rigtlijn van het cilindervlak (§ 396), zoo zal men dezen horizontalen doorgang bekomen, door aan de rigtlijn eene raaklijn te trekken, die evenwijdig is aan den horizontalen doorgang van het hulpvlak. Trekt men vervolgens uit het punt, waar de horizontale doorgang van het rakende vlak de as van projectie snijdt, eene lijn evenwijdig aan den verticalen doorgang van het hulpvlak, dan zal men ook den verticalen doorgang van het rakende vlak verkrijgen.

Het is klaar, dat er even zooveel rakende vlakken zullen bestaan, die aan de vraag beantwoorden, als er raaklijnen aan de rigtlijn kunnen

getrokken worden, die evenwijdig zijn aan den horizontalen doorgan van het hulpvlak.

§ 403. Werkstuk. *Door een gegeven punt, op een gegeven kegelvlak, ee rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Laat (I′,I″) (fig. 145) het gegeven punt zijn, dan ziet men gemakke lijk in, dat ook hier de beschrijvende lijn (I′K′, I″K), die door (I′, I′ gaat, geheel en al in het rakende vlak ligt, en dat de horizontale doo gang dezes vlaks raaklijn aan de rigtlijn des kegelvlaks moet wezer Men gaat derhalve hiermede op dezelfde wijze te werk als in § 396.

§ 404. Werkstuk. *Door een gegeven punt, buiten een gegeven kegelvlak een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Hiertoe merkt men op, dat elk rakend vlak het kegelvlak volgens eer beschrijvende lijn aanraakt, en dat elke beschrijvende lijn door den to des kegelvlaks gaat. Vereenigt men dus den top door eene regte lijn m het gegeven punt, dan zal deze lijn in het begeerde rakende vlak moete liggen, en de punten, waarin deze lijn de beide projectievlakken on moet, zijn derhalve punten van de beide doorgangen dezes vlaks. H overige der constructie heeft zooveel overeenkomst met die, welke in § 4C verklaard is, dat het onnoodig is, hier langer bij stil te staan.

§ 405. Het kan gebeuren, dat de lijn, die den top des kegelvlaks m het gegeven punt vereenigt, evenwijdig loopt aan het horizontale vla in dat geval trekt men, evenwijdig aan de horizontale projectie dezer lij raaklijnen aan de rigtlijn des kegelvlaks, dan zullen deze raaklijnen horizontale doorgangen der begeerde rakende vlakken wezen; derzelv verticale doorgangen worden vervolgens gemakkelijk bepaald, door midd van de beschrijvende lijnen, die door de punten gaan, waar de hor zontale doorgangen de rigtlijn aanraken.

§ 406. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn, buiten een gegeven kegelvla een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Alzoo de kegelvlakken door rakende vlakken volgens regte lijnen word aangeraakt, zoo kan zulk een vlak niet nog te gelijkertijd door eene a dere willekeurige lijn gaan; dat is, men kan niet door elke lijn, buit een kegelvlak, een rakend vlak aan hetzelve brengen. Of zulks echt in een gegeven geval mogelijk is, wordt op dezelfde wijze onderzoch als dit ten aanzien van het cilindervlak in § 401 verklaard is.

§ 407. Werkstuk. *Aan een gegeven kegelvlak een rakend vlak te brenge dat evenwijdig is aan eene gegevene lijn.*

Eene lijn, die uit den top des kegelvlaks, evenwijdig aan de gegeve lijn wordt getrokken, zal blijkbaar in het gevraagde vlak moeten geleg wezen; het punt, waar deze lijn het horizontale vlak ontmoet, zal d een punt van den horizontalen doorgang zijn. Het overige der constr tie is nu uit het voorgaande gemakkelijk op te maken.

§ 408. Werkstuk. *Door een gegeven punt op een omwentelingsvlak rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Daartoe moet men (§ 393) in het gegeven raakpunt slechts raaklijn trekken aan twee kromme lijnen, die door dit punt gaan, en op oppervlak zijn beschreven, zullende alsdan het vlak, dat door deze tw raaklijnen bepaald wordt, het begeerde rakende vlak wezen.

Zij A′ (fig. 146) de horizontale projectie van het gegeven punt, d

il men volgens § 328 deszelfs verticale projectie A″ kunnen bepalen. Beschrijft men nu uit C′, met C′A′ als straal, eenen cirkel, en trekt men door A″ de lijn B″D″ evenwijdig aan de as van projectie, dan zal de cirkel A′B′D′ de horizontale, en de lijn B″D″ de verticale projectie wezen van eenen horizontalen cirkel, die door het gegeven punt (A′, A″) gaat, en op het oppervlak is beschreven; de raaklijn aan dezen cirkel moet dus ook horizontaal wezen. Daar verder de projectiën van eene raaklijn aan eene kromme, ook de projectiën van de kromme moeten aanraken (§ 268), zoo is A′*E*, die den cirkel A′B′D′ in A′ aanraakt, de horizontale projectie dezer raaklijn, terwijl A″E″ derzelver verticale projectie is. Het punt E″, waar deze raaklijn (A′*E*, A″E″) het verticale vlak ontmoet, is een punt van den verticalen doorgang des begeerden vlaks.

Wordt nu door het punt (A′, A″) een meridiaanvlak gebragt, dan snijdt hetzelve het oppervlak volgens eene meridiaan, die de middellijn F′G′ tot horizontale projectie heeft. Verbeeldt men zich deze meridiaan, benevens de raaklijn, die in het punt (A′, A″) aan dezelve getrokken kan worden, zoover om de omwentelings-as gedraaid, tot dat zij evenwijdig is aan het verticale vlak, dan zullen in dien stand H′B′ en H″B″D″ hare projectiën zijn; de projectiën van het gegeven punt zijn alsdan B′ en B″, terwijl de raaklijn B″*I*, die in B″ aan H″B″D″ getrokken is, de verticale projectie van de raaklijn zal wezen. Dewijl H′B′ de horizontale projectie dezer raaklijn is, zoo is I′ het ontmoetingspunt der raaklijn met het horizontale vlak. Wordt nu de meridiaan, met de daaraan getrokkene raaklijn, weder teruggebragt tot haren oorspronkelijken stand, waarin zij G′F′ tot horizontale projectie heeft, dan doorloopt het punt I′ der raaklijn, in het horizontale vlak eenen cirkelboog I′K′, uit C′, met C′I′ als straal, beschreven; K′ is derhalve het wezenlijke snijpunt der raaklijn met het horizontale vlak, en alzoo een punt van den horizontalen doorgang des rakenden vlaks. Dewijl verder deze doorgang K′*L*, even als de eerst getrokkene raaklijn AE, eene horizontale lijn in het begeerde vlak is, zoo is zij evenwijdig aan A′*E*, en geeft in *L* een tweede punt van den verticalen doorgang *L*E″, die derhalve nu ook bepaald is.

§ 409. Gedurende dat de meridiaan tot derzelver oorspronkelijken stand wordt teruggebragt, zal het punt (C′, C″), waar de raaklijn aan de meridiaan de omwentelings-as snijdt, niet van plaats veranderen; vereenigt men dus C″ met A″, dan zal C″A″ de wezenlijke verticale projectie wezen van de raaklijn, die C′A′ tot horizontale projectie heeft. Men kan dus ook zeggen, dat het rakende vlak bepaald is door de lijnen (A′*E*, A″E″) en (C′A′, C″A″), die beide in het gegeven punt raaklijnen zijn aan den cirkel en de meridiaan, welke door dit punt op het oppervlak beschreven zijn.

Voorts zij nog opgemerkt, dat het rakende vlak loodregt staat op het meridiaanvlak, dat door het gegeven punt gaat, omdat het door de raaklijn (A′*E*, A″E″) gaat, die loodregt staat op dit meridiaanvlak. Hieruit volgt verder, dat B″*IA* gelijk is aan den hoek, dien het rakende vlak maakt met het horizontale vlak, en dat alle rakende vlakken, gebragt aan punten van eene zelfde parallel, steeds denzelfden hoek met het horizontale vlak zullen maken.

§ 410. Is het gegeven omwentelingsvlak dat eens bols, dan zal men, om door een gegeven punt van dit oppervlak een rakend vlak aan hetzelve te brengen, de eenvoudiger constructie kunnen toepassen, die in § 188 verklaard is.

§ 411. Werkstuk. *Door een gegeven punt, buiten een gegeven omwentelingsvlak, een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Men verbeelde zich het gegeven punt de top eens kegelvlaks te zijn, hetwelk het gegeven omwentelingsvlak omhult en aanraakt. Elk van het oneindig aantal rakende vlakken, hetwelk aan dit omhullende kegelvlak kan gebragt worden, raakt ook het omwentelingsvlak aan, en gaat door den top des kegelvlaks, dat is, door het gegeven punt. Elk punt der kromme lijn, volgens welke het omwentelingsvlak door het omhullingsvlak wordt aangeraakt, kan alzoo als het raakpunt van het begeerde rakende vlak beschouwd worden, en elk rakend vlak, dat nu, volgens § 408 door zulk een punt aan het gebogen oppervlak gebragt wordt, gaat ook door het gegeven punt; er zijn derhalve oneindig veel vlakken, die aan de vraag beantwoorden. Het komt er dus slechts op aan, om bovengemelde aanrakingskromme te bepalen, en hoe dit geschiedt zal in de twee volgende § § worden aangetoond.

§ 412. Werkstuk. *Men vraagt de kromme lijn te bepalen, volgens welke een kegelvormig omhullingsvlak, welks top gegeven is, een gegeven omwentelingsvlak aanraakt.*

Laat (h', h'') (fig. 147) de top des kegelvlaks, en $(a'b'a', a''f''g'')$ het omwentelingsvlak zijn, welks as $(c', c''e'')$ verticaal is, dan wordt het kegelvormig omhullingsvlak voortgebragt door eene regte lijn, die steeds door het punt (h', h'') gaat, en gedurende hare beweging het omwentelingsvlak altijd aanraakt; al deze raakpunten vormen, behoorlijk vereenigd zijnde, de begeerde aanrakingskromme.

Neemt men nu eene menigte vlakken aan, die alle door het gegeven punt gaan, en het omwentelingsvlak snijden; bepaalt men de doorsnede van elk dezer vlakken met het omwentelingsvlak (§ 348), en trekt men uit het gegeven punt aan elk dezer doorsneden raaklijnen, dan zal de behoorlijke vereeniging van al de verkregene raakpunten blijkbaar de begeerde kromme lijn opleveren. Gemakshalve zal men de snijdende vlakken verticaal kunnen nemen.

Deze constructie, ofschoon de natuurlijkste zijnde, zal echter zeer langwijlig worden. Door de volgende handelwijze, zal men spoediger tot het voorgestelde doel geraken.

§ 413. Wij merken vooreerst op, dat er eenige punten zijn, die gemakkelijk kunnen bepaald worden, en waarmede wij dus zullen aanvangen. Trekt men namelijk aan $a'b'a'$ de raaklijnen $h'a'$ en $h'b'$, dan zijn deze klaarblijkelijk de doorgangen van verticale vlakken, die door h gaan, en het omwentelingsvlak aanraken in punten, die a' en b' tot horizontale projectiën hebben; de verticale projectiën a'' en b'' dezer punten zijn gelegen in de lijn $a''b''$, welke de verticale projectie is van den grootsten cirkel abd. Even zoo zijn de raaklijnen $h''f''$ en $h''g''$ aan $a''f''g''$, de doorgangen van die rakende vlakken aan het oppervlak, welke door h gaan, en loodregt staan op het verticale vlak; f'' en g'' zijn de verticale projectiën van de raakpunten dezer vlakken. Daar nu de middellijn

$g'u'$, die evenwijdig loopt aan de as van projectie, de horizontale projectie van de hoofdmeridiaan efg is, zoo liggen in deze middellijn de horizontale projectiën van de raakpunten f en g, en deze worden dus gemakkelijk in f' en g' bepaald. De raakpunten van zulke, door h gebragte rakende vlakken zijn blijkbaar te gelijkertijd ook raakpunten van de beschrijvende lijn des omhullenden vlaks; wij kennen dus nu de projectiën van vier zulke raakpunten, namelijk a, b, f en g.

Van al de verticale vlakken, die door h gaan, en het omwentelingsvlak snijden, zal datgene de grootste doorsnede opleveren, hetwelk door de omwentelings-as gaat, en dus $h'd'$ tot doorgang heeft; het eene snijpunt dezer doorsnede met de aanrakingskromme zal het hoogste, en het andere het laagste punt dezer kromme wezen. Deze grenspunten worden op de volgende wijze bepaald. Men draait het meridiaanvlak, dat door $h'd'$ gaat, zoover om de omwentelings-as, tot dat hetzelve evenwijdig is met het verticale vlak, en dus $i'g'$ deszelfs horizontale doorgang wordt; alsdan komt h' in i' te vallen, terwijl h'' zich verplaatst in het punt i'' van de horizontale lijn $h''i''$, die de verticale projectie is van den cirkelboog hi. Nu is $e''f''g''$ de verticale projectie van de meridiaan $d'k'$ geworden, en de raaklijnen $i''l''$ en $i''m''$ aan $e''f''g''$, wijzen de raakpunten l'' en m'' aan, welker horizontale projectiën, bij dezen stand van de meridiaan, in l' en m' gelegen zijn. Wordt nu de meridiaan tot haren vorigen stand teruggebragt, dan komt l' in n', en m' in o' te vallen, welke punten n' en o' de horizontale projectiën van de werkelijke raakpunten zijn, die in de meridiaan $d'k'$ liggen; de verticale projectiën l'' en m'' bewegen zich bij deze laatste draaijing op de lijnen $l''n''$ en $m''o''$, die loodregt door $c''e''$ gaan, en zij worden dus bepaald, door uit n' en o' loodlijnen door de as van projectie te trekken. Door deze punten worden de grenzen van de projectiën der raakpunten, ten opzigte van de hoogte boven het horizontale vlak, aangewezen.

De alsnu gevondene zes punten zijn meestal reeds voldoende, om den vorm der aanrakingskromme te doen kennen.

Om nog andere punten der kromme lijn te bepalen, merkt men op, dat de twee, op eene zelfde meridiaan liggende, punten f en g van de aanrakingskromme verkregen zijn, door aan de projectiën van die meridiaan, op een met dezelve evenwijdig vlak, raaklijnen te trekken uit de projectie van het gegeven punt op dat vlak. Om dus de punten, die op eene zelfde meridiaan liggen, te verkrijgen, moet men het gegeven punt en de meridiaan projecteren op een vlak, dat met die meridiaan evenwijdig is, en vervolgens uit deze projectie van het punt, raaklijnen trekken aan deze projectie van de meridiaan. Dewijl echter het projecteren van zulke meridianen niet gemakkelijk is, slaat men liever den volgenden weg in.

Wil men b. v. de punten vinden, die in de meridiaan liggen, welks vlak door $p'q'$ gaat, dan projecteert men het gegeven punt (h', h'') op dit meridiaanvlak; daartoe trekt men uit (h', h'') eene loodlijn $(h'r', h''r'')$ op dat vlak (§ 46), en bepaalt het punt r'', waar deze loodlijn het vlak snijdt. Uit het punt r'', dat nu de projectie is van het punt (h', h'') op het meridiaanvlak, dat door $p'q'$ gaat, moeten nu raaklijnen gebragt worden aan de meridiaan, die in het vlak $p'q'$ ligt. Om deze raaklij-

nen, en dus ook de raakpunten te construeren, brengt men het meri diaanvlak $p'q'$ in den stand $g'u'$, evenwijdig met het verticale vlak, waardoor r' in s', en r'' in s'' komt te vallen. De raaklijnen $s''t''$ en $s''u'$ wijzen de raakpunten t'' en u'' aan, waaruit t' en u', in $g'u'$ gelegen, ge makkelijk volgen. Worden deze punten in de meridiaan, die door $p'q'$ gaat teruggebragt, dan verkrijgt men de horizontale projectiën q' en p' de begeerde raakpunten; de verticale projectiën q'' en p'' liggen alsdan i de lijnen, die uit t'' en u'' loodregt door $c''e''$ getrokken worden. O deze wijze kan men zooveel punten bepalen, als men noodig heeft; doo hunne vereeniging in elk projectievlak, verkrijgt men de projectiën $d'g'd''b'p'f'n'q'$ en $d''g''d''b''p''f''n''q''$ der begeerde aanrakingskromme.

Wat de uitvoering der teekening betreft, ziet men gemakkelijk in dat het gedeelte ($d'o'b'$, $d''o''b''$) der kromme, hetwelk beneden den grootsten cirkel adb ligt, niet van boven, en dat het gedeelte ($g''a''f''$, $g'a'f'$) hetwelk achter de hoofdmeridiaan ligt, niet van voren zigtbaar is.

§ 414. Wanneer het gegeven punt (h', h'') digter bij het horizontal vlak ligt, dan het boven-uiteinde der omwentelings-as, en verder va het horizontale vlak, dan het onder-uiteinde dezer as, zullen er meri diaanvlakken bestaan, waarop de projectie van het gegeven punt binne de overeenkomstige meridiaan valt; uit welke projectie alsdan geen raaklijnen aan die meridiaan kunnen getrokken worden. Zulke meridiane zullen derhalve geene punten van de aanrakingskromme opleveren. Ho digter daarenboven het gegeven punt bij het omwentelingsvlak ligt des te meer meridiaanvlakken zullen er bestaan, waarbij dit plaats vindt

§ 415. Wanneer het omwentelingsvlak dat eens bols is, zal men d kromme lijn, volgens welke eene regte lijn, altijd door een zelfde pun gaande, dit oppervlak aanraakt, eenigzins gemakkelijker kunnen bepalen dewijl de doorsneden van het oppervlak eens bols met platte vlakke altijd cirkels zijn.

§ 416. Werkstuk. *Door eene gegevene lijn, buiten een gegeven omwentelingsvlak, een rakend vlak aan hetzelve te brengen.*

Neemt men twee willekeurige punten van de gegevene regte lijn al toppen van twee kegelvlakken aan, welke beide het omwentelingsvla omhullen en aanraken, en bepaalt men volgens § 413 de beide aanra kingskrommen, dan zullen de punten, waarin deze krommen elkande snijden, de gezochte raakpunten wezen, zoo als gemakkelijk is in te zien Brengt men derhalve door de gegevene lijn en een dezer snijpunten ee vlak, dan zal dit het begeerde rakende vlak wezen; want hetzelve gaa tevens door de lijnen, die dit snijpunt met de beide toppen vereenigen welke lijnen in dit punt raaklijnen aan het omwentelingsvlak zijn.

Het is klaar, dat er zooveel rakende vlakken door de gegevene lij aan het gebogen oppervlak kunnen gebragt worden, als het aantal snij punten van de twee aanrakingskrommen bedraagt.

§ 417. Zie hier nog eene andere constructie voor hetzelfde werkstuk Laat (A', $A''D''$) (fig. 148) de omwentelings-as, $A''P''D''$ de beschrij vende kromme van het oppervlak, en ($B'C'$, $B''C''$) de gegevene lijn zijn waardoor het rakend vlak moet gebragt worden. Verbeeldt men zich nu om tot de oplossing te geraken, dat het rakend vlak reeds bestaat; on derstelt men vervolgens, dat de regte lijn om de omwentelings-as draait

zonder haren afstand tot die as, noch hare helling ten opzigte van het horizontale vlak, te veranderen, en dat zij het rakende vlak in hare beweging medevoert, zoodanig, dat hetzelve altijd het oppervlak blijft aanraken, dan is het klaar, dat door deze beweging het punt, waar het oppervlak door het rakende vlak wordt aangeraakt, wel van plaats zal veranderen, maar dewijl het rakende vlak altijd dezelfde helling behoudt, zal dit raakpunt zich steeds op dezelfde hoogte boven het horizontale vlak bevinden, en zal zich bewegen op den omtrek eens horizontalen cirkels, waarvan het middelpunt in de omwentelings-as gelegen is. Daarenboven zal de gegevene lijn door hare beweging een tweede omwentelingsvlak om dezelfde as voortbrengen, dat door het rakend vlak in al deszelfs standen mede wordt aangeraakt.

Verbeeldt men zich namelijk, dat door de omwentelings-as en het punt, waar het rakende vlak, het eerste oppervlak aanraakt, een meridiaanvlak gebragt wordt, dan zal dit vlak de regte beschrijvende lijn in een punt snijden, hetwelk het raakpunt is van hetzelfde rakende vlak met het tweede oppervlak; want het rakende vlak gaat vooreerst in dit punt door de regte beschrijvende lijn, en ten andere gaat het door de raaklijn in hetzelfde punt aan den horizontalen cirkel, door dit punt doorloopen, dewijl het ook door de raaklijn gaat aan den horizontalen cirkel, in het raakpunt met het eerste oppervlak, en deze twee raaklijnen aan elkander evenwijdig zijn, als beide loodregt staande op het meridiaanvlak.

Daar het werkstuk door middel van het tweede omwentelingsvlak moet worden opgelost, zoo is het noodig, de kromme lijn te construeren, volgens welke dit oppervlak gesneden wordt door een vlak, dat door de omwentelings-as gaat. Neemt men nu dit vlak evenwijdig aan het verticale vlak, zoodat $A'N'$ deszelfs horizontale doorgang is, dan heeft men in § 330 geleerd, hoe deze kromme lijn, waarvan $V''N''W''$ een' tak voorstelt, kan geconstrueerd worden.

Onderstelt men vervolgens, dat de regte lijn en het rakende vlak, door hunne gelijktijdige beweging om de as, in zoodanigen stand gekomen zijn, dat het rakende vlak loodregt staat op het verticale vlak, dan zal in dezen stand, de projectie op dit vlak, van al wat zich in het rakende vlak bevindt, eene regte lijn worden, die raaklijn is aan de beide kromme lijnen $A''P''D''$ en $V''N''W''$. Trekt men dus aan deze kromme lijnen eene gemeene raaklijn, b. v. $N''P''$, dan zal deze de projectie wezen van het begeerde rakende vlak, beschouwd in den stand, dien het aanneemt, wanneer het door de boven opgegevene beweging loodregt is komen te staan op het verticale vlak. Het raakpunt P'' van de beschrijvende kromme des eersten oppervlaks toont nu de hoogte aan, die het raakpunt, van dit oppervlak met het rakende vlak, boven het horizontale vlak heeft; trekt men dus door P'' eene lijn loodregt op $A''D''$, dan zal in deze lijn $P''S''$ de verticale projectie van het begeerde raakpunt gelegen wezen. Beschrijft men vervolgens uit A', met $A'P'=S''P''$ als straal, eenen cirkelboog $P'Q'$, dan zal zich in dezen cirkelboog de horizontale projectie van dit raakpunt moeten bevinden. Om dus het raakpunt geheel en al te bepalen, moet men nog slechts vinden op welke meridiaan van het omwentelingsvlak dit punt gelegen is, en hiertoe kan het raakpunt N'' dienen.

Trekt men namelijk uit N'' eene lijn $N''N'$, loodregt door de as van

projectie, en beschrijft men uit A′, met A′N′ als straal, eenen cirkelboog N′O′, die de lijn B′C′ in O′ snijdt, dan zal deze cirkelboog N′O′ den weg aanwijzen, dien de regte lijn, gaande door de raakpunten van het rakende vlak met de beide oppervlakken, heeft moeten afleggen, om te komen in het verticale vlak, waarvan A′N′ de horizontale doorgang is. Men zal dus de horizontale projectie van deze regte lijn, beschouwd in haren oorspronkelijken stand, verkrijgen, door de lijn A′O′ te trekken; het punt Q′, waar deze laatste lijn den cirkelboog P′Q′ snijdt, is derhalve de horizontale projectie van het punt, waar het eerste oppervlak door het rakende vlak, gaande door de gegevene lijn, wordt aangeraakt. Daar de verticale projectie Q″ in P″S″ moet liggen, zoo wordt dezelve gevonden, door uit Q′ eene loodlijn door de as van projectie te trekken.

Het raakpunt alsnu bepaald zijnde, zal men, om het begeerde rakende vlak te construeren, een vlak moeten brengen, dat door de lijn (B′C′, B″C″) en het punt (Q′, Q″) gaat (§ 117); of wel een vlak, dat het gegeven omwentelingsvlak in het punt (Q′, Q″) aanraakt (§ 408).

Het is klaar, dat men het punt O′, en daardoor het raakpunt (Q′, Q″) ook zal kunnen bepalen, door uit N″ eene lijn evenwijdig aan de as van projectie te trekken, en uit het snijpunt dezer lijn met B″C″, eene loodlijn door de as van projectie tot aan de lijn B′C′.

Trekt men eene tweede gemeene raaklijn aan de beide kromme lijnen A″P″D″ en V″N″W″, dan zal deze raaklijn aanleiding geven tot een tweede raakpunt op het gegeven omwentelingsvlak, en dus ook tot een tweede rakend vlak, dat aan de vraag beantwoordt.

§ 418. Is het gegeven omwentelingsvlak dat eens bols, dan heeft men in § 190 eene eenvoudiger constructie leeren kennen, om aan hetzelve een rakend vlak te brengen, dat door eene gegevene lijn gaat.

§ 419. Werkstuk. *Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, dat evenwijdig is aan eene gegevene lijn.*

Denkt men zich eene lijn, die evenwijdig is met de gegevene lijn, en het oppervlak aanraakt; verbeeldt men zich verder, dat deze lijn zich soodanig beweegt, dat zij, steeds evenwijdig blijvende met de gegevene lijn, ook het omwentelingsvlak blijft aanraken, dan zal deze lijn een cilindervlak beschrijven, hetwelk het omwentelingsvlak omhult en aanraakt, terwijl de achtervolgende raakpunten de aanrakingskromme van dit omhullingsvlak met het omwentelingsvlak zullen vormen. Elk vlak, dat nu rakend vlak is aan dit cilindervlak, is zulks ook aan het omwentelingsvlak, en is tevens evenwijdig met de gegevene lijn; want de beschrijvende lijn van het cilindervlak, volgens welke de aanraking plaats vindt, is evenwijdig met de gegevene lijn, derhalve is ook die lijn evenwijdig met het rakende vlak. Het komt er derhalve slechts op aan, om bovengemelde aanrakingskromme te bepalen, en hoe dit geschiedt zal in de twee volgende §§ worden aangetoond.

§ 420. Werkstuk. *Men vraagt de kromme lijn te bepalen, volgens welke een cilindervormig omhullingsvlak, waarvan de rigting der beschrijvende lijn gegeven is, een gegeven omwentelingsvlak aanraakt.*

Laat ($d'b'c'$, $d''n''c''f''$) (fig. 149) het omwentelingsvlak, (d', $e'f''$) dezelfs as, en ($g'h'$, $g''k''$) de regte lijn wezen, waaraan al de beschrijvende lijnen des omhullenden cilindervlaks evenwijdig moeten zijn.

Neemt men nu eene menigte vlakken aan, die alle door de gegevene lijn gaan, of evenwijdig aan dezelve zijn, en die het omwentelingsvlak snijden; bepaalt men de doorsnede van elk dezer vlakken met het omwentelingsvlak (§ 348), en trekt men aan elk dezer doorsneden raaklijnen, die evenwijdig zijn aan de gegevene lijn, dan zal de behoorlijke vereeniging van al de verkregene raakpunten de begeerde kromme lijn opleveren. Gemakshalve zal men de snijdende vlakken, die evenwijdig zijn aan de gegevene lijn, verticaal kunnen nemen.

Deze constructie, ofschoon de natuurlijkste zijnde, zal echter zeer langwijlig worden. Door de volgende handelwijze, die veel overeenkomst heeft met die, welke in § 413 gevolgd is, zal men spoediger tot het voorgestelde doel geraken.

§ 421. Het omhullingsvlak wordt geboren door de beweging eener regte lijn, die steeds evenwijdig blijft met de lijn gh, en het omwentelingsvlak aanraakt in punten, die tot de begeerde kromme behooren. Trekt men dus aan $d'b'c'$ de raaklijnen $b'l$ en $i'k$, evenwijdig met $g'h'$, dan zijn $b'l$ en $i'k$ de projectiën van twee standen der beschrijvende lijn van het omhullingsvlak, terwijl de punten b' en i' de horizontale projectiën van de raakpunten dezer lijn in die standen zullen wezen. De verticale projectiën b'' en i'' dezer punten liggen blijkbaar in de verticale projectie $a''c''$ van den cirkel, welks horizontale projectie $d'b'c'$ is. Even zoo zijn de raaklijnen $m''p$ en $n''o$, die, evenwijdig met $g''h''$, aan $a''n''c''f''$ zijn getrokken, de verticale projectiën van twee andere standen der beschrijvende lijn, en de punten m'' en n'' zijn de verticale projectiën van de overeenkomstige raakpunten. Hunne andere projectiën m' en n', die in de horizontale projectie $d'c'$ van de hoofdmeridiaan gelegen zijn, worden gemakkelijk bepaald.

Men heeft alzoo de twee, op eene zelfde meridiaan liggende, punten m en n van de aanrakingskromme verkregen, door aan de projectie van die meridiaan, op een met dezelve evenwijdig vlak, raaklijnen te trekken, die evenwijdig waren met de projectie der gegevene lijn op dit vlak. Op dezelfde wijze kan men nu nog meer punten vinden, wanneer men met eene andere meridiaan even zoo te werk gaat. Men moet namelijk, om de punten, die op eene zelfde meridiaan liggen, te verkrijgen, de gegevene lijn en de meridiaan projecteren op een vlak, dat met die meridiaan evenwijdig is, en vervolgens aan deze projectie der meridiaan raaklijnen trekken, die evenwijdig zijn aan deze projectie der gegevene lijn. Dewijl echter het projecteren van zulke meridianen niet gemakkelijk is, zoo slaat men liever den volgenden weg in.

Wil men b. v. de punten vinden, die op de meridiaan liggen, welks vlak door $q'r'$ gaat, dan projecteert men de gegevene lijn ($g'h'$, $g''h''$) op dit meridiaanvlak; daartoe trekt men uit twee willekeurige punten g en h dezer lijn, loodlijnen op dat vlak, hetwelk geschiedt door uit g' en h' de lijnen $g's'$ en $h't'$ loodregt op $q'r'$, en $g''s''$ en $h''t''$ evenwijdig aan de as van projectie te trekken. Trekt men nu uit s' en t' loodlijnen door de as van projectie, dan zijn de verticale projectiën s'' en t'' de snijpunten van deze loodlijnen met het vlak $q'r'$; derhalve is $s''t''$ de projectie der gegevene lijn op dit vlak. Evenwijdig met deze projectie moeten nu raaklijnen aan de meridiaan getrokken worden, die in het vlak $q'r'$

ligt. Daartoe brengt men dit meridiaanvlak $q'r'$ in den stand $d'c'$, evenwijdig aan het verticale vlak van projectie, waardoor (s',s'') in (u',u'') en (t',t'') in (v',v'') komt te vallen, zoodat $u''v''$ de projectie wordt van gh, na deze draaijing. In dezen stand is nu ook $d''n''c''m''$ tevens de projectie van de meridiaan, die in het vlak $q'r'$ ligt. Trekt men dus aan $d''n''c''m''$, evenwijdig met $u''v''$, de raaklijnen $w''y$ en $x''z$, brengt men de raakpunten w'' en x'', in w' en x', op $d'c'$ over, en van daar, door de meridiaan in haren eersten stand terug te voeren, in q' en r', dan zijn deze punten de werkelijke projectiën van de gezochte raakpunten. Hunne verticale projectiën q'' en r'' worden nu gemakkelijk bepaald, als moetende gelegen wezen in de loodlijnen, die uit w'' en x'' op $e''f''$ getrokken worden. Op dezelfde wijze zoekt men nog meer punten van de aanrakingskromme, en verbindt die behoorlijk met elkander. Het hoogste en laagste punt liggen in de meridiaan, die met gh evenwijdig is. Voorts zal men gemakkelijk ontdekken, welke gedeelten der aanrakingskromme zigtbaar zijn of niet, en hoe diensvolgens de projectiën $i'm'b'n'$ en $i''m''b''n''$ scherp geteekend of gestippeld moeten worden.

§ 422. Is het omwentelingsvlak dat eens bols, dan ziet men gemakkelijk in, dat de gezochte aanrakingskromme die groote cirkel des bols zal wezen, welks vlak loodregt gaat door de beschrijvende lijn van het cilindervlak. Men behoeft dus slechts door het middelpunt des bols een vlak te brengen, dat loodregt staat op deze lijn, en den daardoor bepaalden cirkel in dien stand te projecteren (§ 106, 161, 162).

§ 423. Werkstuk. *Aan twee of meer cilinder- of kegelvlakken een rakend vlak te brengen.*

Het is gemakkelijk in te zien, dat men aan verscheidene gebogene oppervlakken, die door platte vlakken volgens regte lijnen aangeraakt worden, slechts in bijzondere gevallen een gemeenschappelijk rakend vlak zal kunnen brengen. Of dit kan plaats vinden bij verscheidene cilinder- of kegelvlakken, die door middel der projectievlakken bepaald zijn, laat zich gemakkelijk onderzoeken. Dit zal namelijk dan het geval wezen, wanneer aan de doorgangen dezer gebogene oppervlakken met een zelfde projectievlak, eene gemeenschappelijke raaklijn kan worden getrokken, en als tevens die standen der beschrijvende lijnen, welke door de raakpunten dezer gemeenschappelijke raaklijn gaan, in een zelfde vlak zijn gelegen. Wordt aan deze beide voorwaarden voldaan, dan zal het rakende vlak bepaald wezen door deze gemeenschappelijke raaklijn en een' der gemelde standen van de beschrijvende lijnen.

OVER HET PROJECTEREN VAN LIGCHAMEN, DIE GEDEELTELIJK DOOR GEBOGENE OPPERVLAKKEN BEGRENSD WORDEN.

---

§ 424. Werkstuk. *Een' regten cirkelvormigen cilinder, die met eene zijner beschrijvende lijnen op het horizontale vlak ligt, op het verticale vlak te projecteren, en denzelven daarenboven voor te stellen in eenen hellenden stand ten opzigte van het horizontale vlak.*

Laat $d'b'c'd'$ (fig. 150) de horizontale projectie van den cilinder zijn, dan komt het er slechts op aan, de grondvlakken $d'b'$ en $c'd'$ op het verticale vlak te projecteren. Daartoe trekt men, op een' afstand, die gelijk is aan den straal $d'c'$ van het grondvlak, de lijn $d''c''$, evenwijdig aan $g''h''$, en men brengt d' en b' daarop over, dan is $d''b''$ de verticale projectie van de horizontale middellijn, terwijl $c''g'' = d'b'$ die is van de verticale middellijn, welke door c' gaat. Beschouwt men nu $d''b''$ en $c''g''$ als de assen eener ellips, dan kan men deze ellips door punten construeren. Wil men echter op eene andere wijze eenige punten van dezelve bepalen, dan projectere men b. v. de verticale koorden, die de helften der horizontale middellijn des grondvlaks midden door deelen; de horizontale projectiën dezer koorden zijn i' en k', op het midden van $d'c'$ en $d'b'$; en derzelver verticale projectiën liggen in de loodlijnen $i'i''$ en $k'k''$. Om nu de projectiën der uiteinden te verkrijgen, verbeelde men zich den cirkel met deze koorden om deszelfs horizontale middellijn evenwijdig aan het horizontale vlak gedraaid, waardoor de werkelijke lengten dezer koorden bekend worden; zet men nu de halve koorden $i'i$ en $k'k$, boven en beneden $d''c''$, op de loodlijnen $i'i''$ en $k'k''$ uit, dan zullen i'' en k'' punten van de verticale projectie des grondvlaks wezen. Met het andere grondvlak kan men op dezelfde wijze te werk gaan.

Draait de cilinder uit zijnen horizontalen stand $d'b'c'd'$ (fig. 151) om het eene uiteinde der beschrijvende lijn, waarmede hij op het horizontale vlak rustte, zoodanig dat deze beschrijvende lijn, in hetzelfde verticale vlak blijvende, een' hoek s met het horizontale vlak maakt, dan wordt de projectie van den cilinder in dezen nieuwen stand op de volgende wijze verkregen. Men verbeelde zich, dat de cilinder op een verticaal vlak, dat door $b'c'$ gaat, geprojecteerd wordt, en dat deze projectie, die een regthoek is, in $b'c'gh$ op het horizontale vlak wordt nedergeslagen. Wordt deze regthoek om het punt b' bewogen, totdat $c'b'f$ gelijk is aan den gegevenen hoek s, dan neemt hij den stand $b'fik$ aan, en lood-

lijnen, uit b', f, i en k op de projectie van de as des cilinders nedergelate: bepalen in dezelve de projectiën $k'e'$ en $i'f'$ van die middellijnen, wel vóór de draaijing verticaal zijn geweest. Trekt men uit k', e', i' en loodlijnen door de as van projectie, en zet men op dezelve, van deze as aan, de afstanden uit, die k, b', i en f van $b'c'$ hebben, dan verkrijgt m de verticale projectiën k'', e'', i'' en f''. Worden uit het midden m en van $b'k$ en fi, loodlijnen door $e'f'$ getrokken, dan vindt men op c zelve de projectiën $p'p'$ en $u'u'$ van de horizontale middellijnen. De ve ticale projectiën p'' en u'' van derzelver uiteinden worden verkregen, do uit p' en u' loodlijnen door de as van projectie te trekken, en op dezelv van deze as af aan, even als boven, de afstanden mp' en uu' uit te zette waarop de punten m en u zich van $b'c'$ bevinden. Maakt men $l'o' =$ en $n'q' = nq$, en handelt men met o' en q' even als met p', dan verkrij men de projectiën van nog meer punten des eenen grondvlaks. Het a dere grondvlak kan op eene dergelijke wijze geprojecteerd worden.

§ 425. Werkstuk. *Een regte cirkelvormige kegel, die met deszelfs gron vlak op het horizontale vlak staat, wordt met eene zijner beschrijvende lij op dit vlak nedergelegd: men vraagt dien kegel in dezen stand te proj teren.*

Laat ($d'b'd'd'$, $d''c''d''$) (fig. 152) de eerste stand des kegels wezen. O derstelt men nu, dat de kegel om het punt d' gedraaid is, en dat beschrijvende lijn $d'e'$ in $e't'$ is komen te vallen, dan zal men, om bepalen, waar de top (d', d'') nederkomt, $e't' = c''d''$ moeten mak Om het grondvlak te projecteren, verbeelde men zich, dat de liggen kegel op een verticaal vlak, evenwijdig aan deszelfs as, en door $b'e$ gaand geprojecteerd is, en dat deze projectie in efg is nedergeslagen. Overige gaat men met het grondvlak even zoo te werk, als in de vorige §; worden dit alles daarenboven door de figuur opgehelderd. Ofschoon het punt het hoogste is, zal echter de regte lijn $t''g''$ niet tot den omtrek d projectie behooren, maar wel de raaklijn $t''h$, die uit t'' aan de projec van het grondvlak wordt getrokken. Dit eerste zou alleen plaats vinde wanneer de as des kegels evenwijdig ware met het verticale vlak v projectie.

§ 426. Werkstuk. *Een' schuin afgeknotten kegel, die door zijne be projectiën gegeven is, op een ander verticaal vlak te projecteren.*

Laat ($d'b'c'd'e'f'$, $d''c''d''f''$) (fig. 153) de gegevene afgeknotte kegel, $g''h''$ de horizontale doorgang van het nieuwe projectievlak wezen. Z men dan op de loodlijn, die uit een willekeurig punt e' van de hor zontale projectie door de nieuwe as van projectie $g''h''$ gaat, van de as af aan, de hoogte ee'' uit, die het punt e boven het horizont vlak heeft, dan verkrijgt men de projectie m'' van het punt e op h nieuwe projectievlak. Bepaalt men op dezelfde wijze, van nog me punten de projectiën op het nieuwe projectievlak, dan verkrijgt m de projectie $m''k''l''$ van het bovenvlak, en door aan dezelve, uit g'' h'' raaklijnen te trekken, de begeerde projectie van den afgeknott kegel.

§ 427. Volmaakt op dezelfde wijze kan elk ander voorwerp, door midd van zijne gewone projectiën, op een willekeurig verticaal vlak geproje teerd, of van eene andere zijde beschouwd, voorgesteld worden.

§ 428. Werkstuk. *Een omwentelingsvlak, waarvan de as evenwijdig is aan het verticale vlak, op het horizontale vlak te projecteren.*

Laat ($a'b'$, $a''b''$) (fig. 154) de omwentelings-as, en $c''d''e''f''$ de beschrijvende kromme wezen. Brengt men dan een vlak loodregt op de omwentelingsas, en dus ook loodregt op het verticale vlak, dan zal dit vlak het omwentelingsvlak snijden volgens een' cirkel, die $d''h''$ tot verticale projectie, en de ellips $d'i'h'i'$ tot horizontale projectie heeft. De kleine as dezer ellips is $d'h'$, en de groote as is gelijk aan $d''h''$. Projecteert men nu een genoegzaam aantal van zulke cirkels, en trekt men eindelijk eene kromme lijn $e'g'i'k'm'$, welke al de ellipsen aanraakt, dan is deze kromme de omtrek der begeerde projectie. Eene der uiterste ellipsen, b. v. $e'g'f'g'$, wordt door eene lijn, zoo als $e'e''$, bepaald, welke loodregt door de as van projectie gaat, en de beschrijvende kromme aanraakt. Voorts is het klaar, dat al deze ellipsen op eene dergelijke wijze kunnen geconstrueerd worden, als de projectiën der cirkels in § 424.

§ 429. Werkstuk. *Eene schroef te teekenen.*

Laat ($a'b'$, $a''b''c''d''$) (fig. 155) een regthoek zijn, die met de as (e',$e''f''$) van den cilinder (A′,A″) in een zelfde vlak ligt, en waarvan de eene zijde (b',$b''c''$) zich op eene beschrijvende lijn van dien cilinder bevindt. Beweegt zich nu deze regthoek op het cilindervlak zoodanig, dat zijne zijde (b',$b''c''$) steeds op eene beschrijvende lijn des cilinders, de regthoek zelf echter met de as in een zelfde vlak blijft, en dat een zijner hoekpunten (b', b'') op het cilindervlak eene schroeflijn beschrijft (§ 275), dan noemt men het ligchaam, dat door den regthoek wordt voortgebragt, eene *vierkante schroef*, terwijl de cilinder de *spil* dezer schroef genoemd wordt.

Alle punten van den regthoek beschrijven, gedurende de opgegevene beweging, schroeflijnen: zoo beschrijven b. v. de punten (a', a'') en (a', d'') elk eene schroeflijn op eenen cilinder, die $a'e'$ tot straal heeft. Dewijl de punten a'' en d'', zoowel als b'' en c'', altijd denzelfden afstand van elkander behouden, en gelegen zijn in lijnen, die evenwijdig zijn met het verticale vlak, zoo zullen de schroeflijnen, die door deze vier punten worden doorloopen, op de overeenkomstige cilindervlakken aan elkander evenwijdig zijn. Heeft men derhalve (§ 277) de schroefgangen van eenerlei hoogte $b''g''i''$ en $d''h''k''$ geteekend, die door b'' en d'' doorloopen worden, dan behoeft men slechts, op den verticalen afstand $a''d''$ van dezelve, evenwijdige schroefgangen te brengen, ten einde die te verkrijgen, welke door d'' en c'' worden beschreven. De volgende schroefgangen beschrijft men evenwijdig aan de beide eerste, op eenen afstand van elkander, die gelijk is aan derzelver hoogte $b''i''$ of $d''k''$. Het onzigtbare of achterste gedeelte van de schroef behoeft niet geteekend te worden, dewijl hetzelve volmaakt overeenkomt met het voorste. Lijnen, zoo als mn, behooren tot verschillende op elkander volgende standen van den regthoek, en kunnen dienen, om de voorstelling van de schroef te verduidelijken.

§ 430. Beweegt zich, in plaats van den regthoek, een gelijkbeenige driehoek onder dezelfde voorwaarden, dan ziet men gemakkelijk in, dat elk der drie hoekpunten dezes driehoeks eene schroeflijn beschrijft, dat twee dezer schroeflijnen op de spil zullen liggen, en dat de derde schroeflijn zich op eenen grooteren cilinder zal bevinden. De basis des driehoeks, welke steeds op de spil blijft, is bij zulke *driehoekige schroeven* meestal

[illegible]

OVER DE PERSPECTIEF.

(*Vervolg van bl.* 91.)

§ 431. Wanneer de ligchamen, die men in perspectief wil brengen, door platte vlakken begrensd worden, is het niet moeijelijk om, voor eenen gegevenen stand van het oog, de zigtbare zijvlakken van de onzigtbare te onderscheiden, en gevolgelijk de ribben te bepalen, die gezamenlijk den schijnbaren omtrek uitmaken. Zijn echter deze ligchamen door gebogene oppervlakken begrensd, dan is de schijnbare omtrek niet meer uit regte lijnen zamengesteld, maar vormt eene kromme lijn, welke op het oppervlak des ligchaams moet bepaald worden, door middel van hare bijzondere eigenschap, dat zij, ten opzigte van eenen gegevenen stand van het oog, het zigtbare gedeelte des ligchaams van het onzigtbare afscheidt.

§ 432. Verbeeldt men zich nu, dat een gezigtstraal, uit het oog getrokken, zich zoodanig beweegt, dat hij altijd op het oppervlak des ligchaams blijft rusten, en hetzelve in elken stand aanraakt, dan zal deze straal een kegelvlak beschrijven, dat het ligchaam omvat en aanraakt, en dat dus tot de omhullingsvlakken behoort. De kromme lijn, volgens welke dit omhullingsvlak het ligchaam aanraakt, zal deszelfs schijnbare omtrek wezen; want door deze kromme lijn wordt het zigtbare gedeelte des ligchaams van het onzigtbare afgescheiden.

§ 433. Om nu een ligchaam, dat door een gebogen oppervlak begrensd is, in perspectief te brengen, moet men beginnen, met deszelfs schijnbaren omtrek te bepalen; dat is, men moet de kromme lijn construeren, volgens welke een omhullend kegelvlak, dat deszelfs top in het oog heeft, het ligchaam aanraakt. Hiertoe gaat men op dezelfde wijze te werk, als in § 412 ten aanzien van een omwentelingsligchaam gezegd is. Men snijdt namelijk het ligchaam door eene reeks van vlakken, die alle door het oog gaan, en die gemakshalve loodregt op een der projectievlakken worden genomen; men bepaalt de doorsnede van elk dezer vlakken met het oppervlak des ligchaams, en men trekt vervolgens uit het oog, aan elk dezer doorsneden raaklijnen, dan zal de behoorlijke vereeniging van al de verkregene raakpunten den begeerden schijnbaren omtrek opleveren.

Den schijnbaren omtrek van het ligchaam bepaald hebbende, zal men deszelfs perspectief bekomen, door een genoegzaam aantal punten van dezen schijnbaren omtrek, volgens eene der opgegevene leerwijzen, in perspectief te brengen.

§ 434. Om een' bol in perspectief te brengen, merkt men op, dat deszelfs schijnbare omtrek een kleine cirkel is, volgens welken de bol

wordt aangeraakt door eene lijn, die uit het oog voortkomt, en altijd op den bol blijft rusten. Zijn nu de beide projectiën van den bol en van het oog gegeven, dan kan deze aanrakingscirkel gemakkelijk bepaald worden; want brengt men een verticaal vlak door het oog en het middelpunt des bols, en slaat men dit vlak, met al wat er zich in bevindt, op het horizontale vlak neder, dan zal men, door uit het nedergeslagen oog eene raaklijn aan den nedergeslagen' grooten cirkel te trekken, en uit het raakpunt eene loodlijn neder te laten op de lijn, die het oog met het middelpunt des bols vereenigt, den straal en het middelpunt dezes kleinen cirkels bepaald hebben, waarna deszelfs beide projectiën gemakkelijk kunnen geconstrueerd worden. Door een genoegzaam aantal punten van dezen schijnbaren omtrek in perspectief te brengen, zal men de perspectief van den bol bekomen. Het is klaar, dat deze perspectief in de meeste gevallen eene ellips, en slechts in enkele gevallen een cirkel zal wezen.

§ 435. Het is ligtelijk in te zien, dat het bepalen van den schijnbaren omtrek der ligchamen meestal zeer werkelijk zal worden. Soomtijds echter zijn de voorwerpen van dien aard, dat men het vooraf bepalen van derzelver schijnbare omtrekken kan ontwijken, zoo als uit de volgende voorbeelden blijkt.

§ 436. Om een' regten cirkelvormigen cilinder, die met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, in perspectief te brengen, begint men (fig. 156) met, volgens § 240, de omtrekken van grond- en bovenvlak in perspectief te brengen; vervolgens trekt men aan de perspectief van den omtrek des grondvlaks twee verticale raaklijnen mm' en nn', die ook de perspectief van den omtrek des bovenvlaks zullen aanraken, en met deze kromme lijn de geheele perspectief van den cilinder zullen begrenzen.

Wil men de punten m en n door constructie bepalen, dan zet men, van O af, op de loodlijn OO, de hoogte OD boven de grondlijn uit, waardoor men de horizontale projectie van het oog vindt (*); uit deze horizontale projectie van het oog trekt men (§ 400) raaklijnen aan de rigtlijn des cilinders, en brengt ooglijnen door de raakpunten M en N; deze ooglijnen zullen, door derzelver snijding met de perspectief van het grondvlak, de punten m en n doen kennen.

§ 437. Wil men een' regten cirkelvormigen kegel, die met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, in perspectief brengen, dan construeert men vooreerst (fig. 157), volgens § 240, de perspectief van den omtrek des grondvlaks, en vervolgens de perspectief p van den top; eindelijk trekt men uit de perspectief van den top raaklijnen pm en pn aan de perspectief van het grondvlak, dan zal hierdoor de geheele perspectief van den kegel bepaald zijn.

Om ook hier de punten m en n door constructie te bepalen, trekt men uit P' eene loodlijn door de grondlijn; en zet boven deszelve de hoogte AB des kegels uit, waardoor men de verticale projectie van den

(*) Het oog is vóór het glas, en de cilinder achter het glas ondersteld. De twee projectievlakken zijn hier in elkander geslagen, door het voorste gedeelte van het horizontale vlak om de grondlijn naar boven te laten omwentelen, totdat hetzelve op het bovenste gedeelte van het verticale vlak komt te vallen. Hierdoor komen de beide projectiën van het oog boven de grondlijn, of boven de as van projectie, te liggen.

op des kegels zal verkrijgen; vervolgens construeert men de horizontale projectie van het oog, even als in de vorige §, en merkt op, dat O de verticale projectie van het oog is. Bepaalt men nu het punt, waar de lijn, die door het oog en den top gaat, het horizontale vlak ontmoet, en trekt men uit dit punt (§ 404), raaklijnen aan de rigtlijn des kegels, dan zal men, door de raakpunten M en N in perspectief te brengen, de punten *m* en *n* verkrijgen.

Valt het punt *p* binnen den omtrek van de kromme *mn*, dan bestaat de geheele perspectief des kegels uit die kromme alleen.

§ 438. Moet men een omwentelingsligchaam, waarvan de as vertikaal staat, in perspectief brengen, dan snijdt men hetzelve door vlakken, die loodregt op deze as staan, en men brengt al de cirkels, die hierdoor ontstaan, in perspectief; vervolgens beschrijft men eene lijn, die al deze perspectivische cirkels aanraakt, welke dan de perspectief van den schijnbaren omtrek zal wezen. In fig. 158 is deze constructie op eenige weinige snijdende vlakken uitgevoerd, en deze figuur zal, wanneer men het voorgaande wel verstaan heeft, geene verdere verklaring behoeven.

§ 439. Thans zal nog met een enkel woord gewaagd worden van de *isometrische perspectief* van Professor Farish.

Men onderstelle, dat het af te beelden voorwerp een cubus zij. Wanneer men dan het oog op eenen oneindigen afstand in het verlengde der diagonaal van den cubus aanneemt, en het glas of tafereel ergens loodregt op deze diagonaal, dan zullen de gezigtstralen, die uit de hoekpunten des voorwerps naar het oog getrokken worden, onderling evenwijdig zijn, en tevens loodregt op het glas staan: de perspectief van dezen cubus zal dus niets anders wezen dan deszelfs projectie op het glas. Onderzoeken wij nu, wat de projectie van eenen cubus is, wanneer zijne diagonaal loodregt staat op het projectievlak.

De diagonaal *Dd* (fig. 159) maakt met elk der drie ribben, die aan haar uiteinde *d* zamenkomen, gelijke hoeken, waarvan de tangens is $\sqrt{2}$; daar voorts het projecterend vlak van elk dezer ribben door de diagonaal gaat, zullen de hoeken, die deze ribben met het projectievlak maken, mede onderling gelijk, en de complementen der vorige wezen. Stelt men dus de lengte van ééne dezer ribben door *a* voor, dan is de projectie van elk derzelve gelijk $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$. Alzoo nu deze drie ribben op gelijke wijze ten opzigte van elkander, en van het projectievlak geplaatst zijn, zullen hare projectiën onderling gelijke hoeken van 120° moeten vormen, waarvan men zich ook kan overtuigen, door den hoek te berekenen, volgens welken de regte hoek, ingesloten door twee dezer ribben, zich projecteert, als wanneer men 120° zal bekomen (*): de projectiën dezer drie ribben zullen dus voorgesteld worden door de gelijke lijnen *dc*, *db* en *df* (fig. 160). Verder heeft elke dezer ribben eene overstaande, die met haar in hetzelfde projecterende vlak ligt, aan haar gelijk en evenwijdig is, en dus denzelfden stand ten opzigte van het

(*) Behalve door bolvormige driehoeksmeting, zal men de projectie van dezen hoek, ook door regtlijnige driehoeksmeting kunnen berekenen. Trekt men b. v. de lijn cb, dan is $cb = CB = a\sqrt{2}$, en daar $db = dc = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ is, heeft men in driehoek cdb al de zijden bekend men kan dus den hoek cdb berekenen, die de projectie is van den hoek CdB.

projectievlak heeft; de projectiën *de*, *dg* en *da* dezer drie overstaande ribben, zullen derhalve dezelfde lengte hebben als die der drie eerste, en in derzelver verlengden gelegen wezen. Daar nu *d* de projectie is van de diagonaal, en dus ook van derzelver uiteinden, zoo zijn de projectiën van al de hoekpunten van den cubus bepaald, en door deze te vereenigen, zal men de projectiën der zijvlakken, of de projectie van den cubus bekomen. Deze projectie blijkt alsdan tot omtrek te hebben een' regelmatigen zeshoek, beschreven in een' cirkel, die $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$ tot straal heeft, wanneer *a* de zijde van den cubus voorstelt.

§ 440. Wil men alzoo volgens deze leerwijze een' cubus, waarvan ABCD (fig. 161) een der zijvlakken voorstelt, in perspectief brengen, dan begint men met eene lijn te construeren, die gelijk is aan $\frac{1}{3}AB\sqrt{6}$. Hiertoe trekt men in het vierkant ABCD de beide diagonalen AC en BD, elkander in O snijdende; vervolgens maakt men hoek ODE=30°, dan zal $DO=\frac{1}{2}AB\sqrt{2}$, en dus $DE=DO\times\sec.30^\circ=\frac{1}{3}AB\sqrt{6}$ wezen. Beschrijft men nu, met DE als straal, eenen cirkel (fig. 162), en in dien cirkel eenen regelmatigen zeshoek ABEFGC, dan zal men, na de stralen DE, DA en DG getrokken te hebben, de begeerde perspectief van den gegevenen cubus bekomen.

§ 441. Wanneer er lijnen evenwijdig gegeven waren aan eene der drie ribben DA, DE en DG (fig. 159) van den cubus, en deze lijnen in de projectie of perspectief van den cubus moesten voorgesteld worden, dan is het klaar, dat de projectiën of perspectieven dezer lijnen evenwijdig zouden zijn aan een' der stralen *da*, *de* en *dg* (fig. 160), en daarenboven tot elkander en tot een' dezer stralen dezelfde betrekking zouden behouden, welke deze lijnen in den cubus tot elkander hadden. Is dus een punt in de ruimte gegeven, door middel van deszelfs afstanden tot de drie zijvlakken van den cubus, die door het hoekpunt D gaan, dan zullen deze afstanden, als evenwijdig zijnde aan de drie ribben DA, DE en DG, in de perspectief ook evenwijdig zijn aan *da*, *de* en *dg*, en tevens zullen deze afstanden tot hunne perspectieven dezelfde reden hebben, als eene der ribben DA tot derzelver perspectief *da*, dat is, als 1 tot $\frac{1}{3}\sqrt{6}$. Daar verder de drie afstanden, die een punt tot bovengemelde vlakken heeft, ook kunnen gemeten worden op de ribben DA, DE en DG van den cubus, zoo zullen de perspectieven dezer afstanden ook kunnen uitgezet worden op de perspectieven van bovengenoemde ribben, dat is, op *da*, *de* en *dg*.

Uithoofde van de bijzondere omstandigheid, dat de drie lijnen, die een punt in de ruimte ten opzigte van drie op elkander loodregt staande vlakken bepalen, bij deze soort van perspectief, in gelijke reden afnemen, heeft men aan dezelve den naam van isometrische (gelijkmatige) perspectief gegeven.

§ 442. Trekt men uit een willekeurig punt O (fig. 163) twee lijnen OR en OL, die met elkander eenen hoek van 120° vormen, en deelt men dezen hoek door de lijn VV′ midden door, dan zullen deze drie lijnen OR, OL en VV′ de perspectieven voorstellen van drie op elkander loodregt staande lijnen, wanneer men namelijk het oog op eenen oneindigen afstand onderstelt in de loodlijn, die uit O op het vlak der teekening wordt opgerigt. De drie lijnen VV′, OR en OL, die men *isometrische lijnen* noemt,

worden van elkander onderscheiden door VV′ de *verticale-*, OR de *regter-* en OL de *linker-lijn* te noemen; de beide laatste kunnen echter ook met den gemeenschappelijken naam van *horizontale isometrische lijnen* bestempeld worden. Aan elke lijn in de ruimte, die met eene dezer drie lijnen evenwijdig is, wordt dezelfde naam gegeven, als aan de lijn, waarmede zij evenwijdig loopt. Verder wordt het vlak, dat door de verticale- en de regter-lijn gaat, het *regter-isometrische-vlak* genoemd; het vlak, dat door de verticale en de linker-lijn gaat, heet het *linker-isometrische-vlak*, en het vlak, dat door de regter- en linker-lijn gaat, draagt den naam van *horizontaal-vlak*. De perspectivische afstanden, waarop een punt in de ruimte zich van elk dezer drie vlakken bevindt, worden klaarblijkelijk gemeten op de drie isometrische lijnen VV′, OR en OL.

§ 443. Laat nu r, l en h (fig. 163) de afstanden zijn, die een punt in de ruimte heeft tot de drie op elkander loodregt staande vlakken; namelijk r de regter-afstand, of de afstand van het punt tot het regtervlak; l de linker-afstand, of de afstand van het punt tot het linkervlak en h de hoogte van het punt boven het horizontale vlak; dan herleidt men, om dit aldus gegeven punt in perspectief te brengen, deze drie afstanden eerst tot perspectivische afstanden, door dezelve in reden van 1 tot $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, of van AB tot DE (fig. 161) te verkleinen; vervolgens neemt men in fig. 163, Oa gelijk aan den herleiden linker-afstand, Ob gelijk aan den herleiden regter-afstand, en men trekt uit a en b lijnen evenwijdig aan OL en OR, dan zal het snijpunt c de perspectief wezen van den voet der loodlijn, die uit het gegeven punt op het horizontale vlak valt; trekt men eindelijk uit c eene lijn evenwijdig aan VV′, en neemt men cP gelijk aan de herleide hoogte, dan zal P de begeerde perspectief van het gegeven punt wezen.

§ 444. Zijn van een ander punt in de ruimte, insgelijks de afstanden r', l' en h' gegeven, en handelt men met deze op dezelfde wijze als in de vorige § is aangetoond, dan zal men ook de perspectief P′ van dit tweede punt bekomen, en door deze met P te vereenigen, verkrijgt men de perspectief van de lijn in de ruimte, die door de twee gegevene punten gaat.

Door elk der hoekpunten van een veelvlakkig ligchaam op de bovenbeschrevene wijze in perspectief te brengen, en de perspectivische punten op dezelfde wijze te vereenigen, als de overeenkomstige punten in het ligchaam vereenigd zijn, zal men de perspectief van het veelvlakkig ligchaam bekomen.

Zoo is b. v. in fig. 164 de perspectief bepaald van een regthoekig parallelopipedum, waarvan ABCD de horizontale projectie en OH de hoogte is; terwijl fig. 165 de perspectief van ditzelfde ligchaam voorstelt, wanneer het een' anderen stand ten opzigte der isometrische vlakken heeft.

Deze ligchamen worden nu ondersteld met hunne grondvlakken te staan op het vlak EDGF (fig. 159), en zijn in perspectief gebragt op een glas, dat loodregt staat op Dd, waarin op eenen oneindigen afstand het oog is aangenomen; omdat nu de gezigtstralen onderling evenwijdig loopen, zijn deze ligchamen eigenlijk op dit glas geprojecteerd geworden.

§ 445. Wanneer men de perspectivische afstanden van al de hoekpunten eens ligchaams alle eenige malen grooter of kleiner op de isometrische lijnen uitzet, dan zullen klaarblijkelijk al de ribben des ligchaams in

dezelfde reden grooter of kleiner worden voorgesteld; het is dus zeer gemakkelijk, om eene gegevene figuur naar eene gegevene maatstaf perspectivisch te teekenen. Zet men b. v., in plaats van de perspectivische afstanden, de werkelijke afstanden op de isometrische lijnen uit, dan zullen al de ribben des ligchaams in reden van $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ tot 1 vergrooten.

§ 446. De perspectief van een' cirkel, gelegen in een der isometrische vlakken, of in een daarmede evenwijdig vlak, is altijd eene ellips, van dezelfde gedaante. Men kan zich hiervan overtuigen door de beschouwing van fig. 166, waar cirkels van gelijken straal in elk der isometrische vlakken perspectivisch zijn voorgesteld. Worden nu de stralen der cirkels grooter of kleiner, dan zullen van de ellipsen, die perspectieven dezer cirkels zijn, de assen in dezelfde reden toe- of afnemen, en dus de ellipsen zelven gelijkvormig blijven met de hier voorgestelde.

Het vierkant, om een' dezer cirkels beschreven, en waarvan de zijden isometrische lijnen zijn, zal in perspectief eene ruit IKLM vormen; vereenigt men dus de perspectieven E en F van de raakpunten, alsmede G en H, dan zijn EF en GH twee gelijke toegevoegde middellijnen van de ellips, welke middellijnen, omdat zij tevens isometrische lijnen zijn, *isometrische middellijnen* genoemd worden, en gelijk zullen wezen aan $\frac{1}{3}m\sqrt{6}$, als m de middellijn des cirkels is (§ 439). Daar voorts de diagonalen eener ruit loodregt op elkander staan, zoo zijn IL en KM de rigtingen der assen. De groote as AB is blijkbaar gelijk aan de middellijn m des voorgestelden cirkels, want de grootste perspectief geeft die der middellijnen, welke evenwijdig loopt aan het glas, liggende b. v. op AG (fig. 159); de kleine as CD wordt gevonden, door op te merken, dat de som van de vierkanten der assen eener ellips gelijk is aan de som van de vierkanten van twee harer toegevoegde middellijnen; men heeft dus $AB^2 + CD^2 = 2EF^2 = \frac{4}{3}m^2$, waaruit $CD = \frac{1}{3}m\sqrt{3}$. Om derhalve de kleine as te construeren, beschrijft men eenen regthoekigen driehoek PQR (fig. 167), waarin de regthoekszijde $PQ = EF = GH = \frac{1}{3}m\sqrt{6}$, en de hypothenusa $PR = AB = m$ is, dan zal $RQ = \sqrt{(PR^2 - PQ^2)} = \frac{1}{3}m\sqrt{3}$, en dus gelijk aan de kleine as CD wezen. Dewijl de verlengden van EF en GH diagonalen van den regthoek onder de assen moeten zijn, kan men de kleine as ook construeren, door uit A eene loodlijn op AB op te rigten, tot aan de verlengden van EF en GH.

Hieruit volgt nog, dat de kleine as, de isometrische middellijn, en de groote as tot elkander staan, als $\frac{1}{3}\sqrt{3} : \frac{1}{3}\sqrt{6} : 1$, of als $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

§ 447. Wil men dus eenen cirkel, die in een isometrisch vlak ligt, en eene gegevene lijn m tot middellijn heeft, in perspectief brengen, dan begint men, met de perspectief O (fig. 166) van deszelfs middelpunt te bepalen; door deze perspectief trekt men de isometrische lijnen GH en EF, welke men gelijk maakt aan $\frac{1}{3}m\sqrt{6}$ (§ 440); vervolgens construeert men de ruit IKLM, welke de perspectief is van het vierkant, om den cirkel beschreven, en trekt in deze ruit de diagonalen IL en KM; wordt nu AB gelijk aan de middellijn m, of AO gelijk aan $\frac{1}{2}m$, en $CD = \frac{1}{3}AB\sqrt{3}$ genomen, dan zijn AB en CD de beide assen der begeerde ellips. De assen bepaald zijnde, kan de ellips geconstrueerd worden; of men kan dezelve ook uit de hand trekken door de acht punten, die er nu reeds van bepaald zijn.

Is er eene lijn gegeven, die in het middelpunt des cirkels loodregt op deszelfs vlak staat, dan zal de perspectief OK van deze lijn klaarblijkelijk in de rigting vallen van de kleine as der ellips, die de perspectief van den cirkel is; immers moet al wat gelegen is in het vlak DCc (fig. 159), dat loodregt staat op het vlak DAGC, en tevens loodregt op het glas, zich projecteren in de lijn dc.

§ 448. Om kromme lijnen in perspectief te brengen, of cirkels, die niet in isometrische vlakken gelegen zijn, zal men een genoegzaam aantal punten van dezelve in perspectief moeten brengen, en deze perspectieven uit de hand moeten vereenigen.

§ 449. Om eenen regten cirkelvormigen cilinder, waarvan de as eene isometrische lijn is, in perspectief te brengen, zal men het grond- en bovenvlak door isometrische ellipsen (§ 447) moeten voorstellen, en vervolgens twee lijnen moeten trekken, die beide deze ellipsen aanraken. Op dezelfde wijze zal een regte cirkelvormige kegel, of een afgeknotte kegel, waarvan de as eene isometrische lijn is, in perspectief kunnen gebragt worden.

§ 450. Het is klaar, dat de isometrische perspectief eens bols een groote cirkel van den bol zal zijn; heeft men dus het middelpunt des bols in perspectief gebragt, dan zal men uit dit punt, met de werkelijke lengte van den straal des bols, slechts eenen cirkel behoeven te beschrijven, om de perspectief des bols te bekomen.

§ 451. De isometrische perspectief, waarvan wij nu in korte trekken de gronden en het gebruik hebben aangewezen, is in velerlei opzigt te verkiezen boven de gewone perspectief: hare regelen zijn veel gemakkelijker en eenvoudiger, en door deze laatste eigenschap geeft zij aanleiding tot naauwkeuriger constructiën. Dat gelijke en evenwijdige lijnen bij deze perspectief ook gelijk en evenwijdig blijven, is geen gering voordeel in derzelver uitvoering, en draagt veel bij tot eene duidelijke voorstelling der voorwerpen.

Vooral is deze soort van perspectief zeer geschikt tot het voorstellen van allerlei werktuigen en natuurkundige instrumenten, waarbij het voornamelijk aankomt op het duidelijk aantoonen van het verband der deelen en derzelver onderlinge werking; zij wordt dan daartoe ook, bijzonder in Engeland, veelvuldig aangewend. De omtrekken van zoodanige voorwerpen zijn meestal in isometrische rigtingen gelegen, dat is, evenwijdig aan de rigtingen der ribben van eenen cubus, en kunnen dus door deze perspectief gemakkelijk worden voorgesteld; verder bevinden zich de in elkander grijpende raderen, die in dezelve voorkomen, grootendeels in isometrische vlakken. In fig. 168 ziet men uit een voorbeeld, hoe duidelijk zich een zamenstel van raderen door de isometrische perspectief laat voorstellen.

OVER DE SCHADUWEN.

(*Vervolg van bl.* 98.)

§ 452. Wanneer een ligchaam, dat schaduw werpt, niet door platte vlakken begrensd wordt, dan is de lijn, welke op het oppervlak des ligchaams het verlichte van het onverlichte gedeelte afscheidt, niet meer een zamenstel van ribben, dat gemakkelijk te onderkennen is; maar zij is alsdan eene kromme lijn, die bepaald moet worden door hare bijzondere eigenschap, dat zij, ten opzigte van eene gegevene rigting der lichtstralen, de grens is van bovengenoemde gedeelten des oppervlaks.

§ 453. Is nu een ligchaam, dat door een gebogen oppervlak begrensd wordt, door evenwijdige lichtstralen verlicht, dan zullen al de lichtstralen, die het oppervlak des ligchaams aanraken, een cilindervlak vormen, dat het ligchaam omvat en aanraakt, en dat dus tot de omhullingsvlakken behoort. De kromme lijn, volgens welke deze aanraking plaats vindt, zal dan de schaduwlijn des ligchaams wezen, of de grens tusschen deszelfs verlichte en onverlichte gedeelte; terwijl de kromme lijn, volgens welke bovengenoemd cilindervlak het oppervlak snijdt, dat de schaduw opvangt, den omtrek der slagschaduw zal opleveren.

§ 454. Is de rigting der lichtstralen aangewezen door de beide projectiën eener lijn, waaraan deze lichtstralen evenwijdig moeten zijn, en is ook het schaduwwerpend ligchaam, zoowel als het oppervlak, dat de schaduw opvangt, in gedaante en stand ten opzigte der projectievlakken gegeven, dan moet men, volgens de vorige §, om de schaduwlijn des ligchaams te bepalen, de kromme lijn construeren, volgens welke een omhullend cilindervlak, waarvan de beschrijvende lijn evenwijdig is aan de rigting der lichtstralen, het ligchaam aanraakt. Hiertoe gaat men op dezelfde wijze te werk, als in § 420 ten aanzien van een omwentelingsligchaam gezegd is. Men snijdt namelijk het ligchaam door eene reeks van vlakken, die evenwijdig zijn aan de gegevene rigting der lichtstralen, en die gemakshalve loodregt op een der projectievlakken worden genomen; men bepaalt de doorsnede van elk dezer vlakken met het oppervlak des ligchaams, en men trekt vervolgens aan elk dezer doorsneden raaklijnen, die evenwijdig zijn aan de gegevene rigting der lichtstralen, dan zal de behoorlijke vereeniging van al de verkregene raakpunten de begeerde schaduwlijn opleveren.

Zoodra de schaduwlijn op het oppervlak eens ligchaams bepaald is, zal men, om deszelfs slagschaduw te construeren, slechts de punten behoeven te vereenigen, waar bovengenoemde raaklijnen het oppervlak snijden, dat de schaduw moet opvangen.

§ 455. De algemeene leerwijze, ter bepaling van de schaduwlijn bij gebogene oppervlakken, die in de vorige § is opgegeven, kan somtijds gewijzigd worden naar den aard der oppervlakken, die men beschouwt. Zoo is in § 256 de schaduwlijn eens bols bepaald, door slechts den grooten cirkel te construeren, volgens welken een vlak, dat door het middelpunt gaat, en loodregt is op de rigting der lichtstralen, den bol snijdt.

Hier volgen nu nog eenige werkstukken, betrekkelijk de schaduwen van ligchamen, die door platte en gebogene vlakken begrensd worden.

§ 456. Werkstuk. *Het regthoekig parallelopipedum* ($a'f'$, $a''f''$) (fig. 169) *ligt op het parallelopipedum* ($d'c'$, $b''c''$), *dat door eenen halven cilinder* ($g'i'p'$, $g''q''$) *is uitgehold: men vraagt de schaduw te construeren, die door het eerste ligchaam binnen in den cilinder geworpen wordt.*

Laat (L'1', L''1'') de rigting der lichtstralen zijn; trekt men dan door de punten g' en h'' lijnen, die evenwijdig zijn aan de projectiën dezer rigting, dan verkrijgt men de lijn $i''k''$ als de schaduw der ribbe (g',$g''h''$) des cilinders. Wat het parallelopipedum ($d'f'$, $a''f''$) betreft, ziet men gemakkelijk in, dat van deszelfs voorste ribben de onderste, en van de achterste ribben de bovenste, schaduwen werpen, of de schaduwlijnen zijn. Men bepale derhalve de schaduwen van eene reeks van punten dezer ribben, en vereenige dezelve behoorlijk met elkander. Zoo is b. v. l de schaduw van het punt (m', m'') der voorste onderribbe, en n de schaduw van het punt (o',o'') der achterste bovenribbe.

§ 457. Werkstuk. *De schaduw te bepalen, die binnen in eenen hollen halven bol geworpen wordt, alsmede deszelfs slagschaduw op het horizontale vlak.*

Om de oplossing te vereenvoudigen, neme men een nieuw verticaal vlak van projectie aan, dat evenwijdig is aan de rigting der lichtstralen; de nieuwe as van projectie vw (fig. 170) zal dan evenwijdig zijn aan de horizontale projectie $d'b'$ van een' der lichtstralen. Door middel van de gegevene projectiën, bepale men de projectie van den halven bol, alsmede de projectie $d''b''$ van een' der lichtstralen op dit nieuwe verticale vlak. Verbeeldt men zich nu, dat de halve bol gesneden wordt door verticale vlakken, die evenwijdig zijn met vw, dan geschiedt zulks volgens halve cirkels, die gelijk zijn aan derzelver verticale projectiën. Het punt (a', a'') werpt zijne schaduw in b', zoo als door de constructie wordt aangetoond. Een ander punt c' van den binnensten schaduw-omtrek wordt verkregen, door $d'e'$ evenwijdig met $d'b'$ te trekken, de cirkels $d'e'$ en $f'g'$ in $d''e''$ en $f''g''$ te projecteren, uit f'' eene lijn evenwijdig met $d''b''$ te trekken, en derzelver doorsnede c'' met $f''g''$, in c' op $d'e'$ over te brengen. Op deze wijze voortgaande, zal men de schaduw-grens $c'b'k'$ verkrijgen.

Om de slagschaduw te construeren, merkt men op, dat de halve cirkel $i'e'k'$, welke zijne schaduw op het horizontale vlak werpt, met dit vlak evenwijdig is, en dat dus zijne schaduw op hetzelve een halve cirkel is, die denzelfden straal heeft; beschrijft men derhalve uit het schaduwpunt w' des middelpunts, met den straal des bols, den halven cirkel lmn, dan is deze de omtrek der schaduw, voor zoo verre die door den halven cirkel $i'e'k'$ ontstaat. Om het gedeelte der schaduw te bekomen, dat door het buitenste oppervlak des bols geworpen wordt, trekke men aan de verticale projectiën van de buitenste cirkels der verticale doorsneden, raaklijnen op'', rq'', die evenwijdig zijn met $d''b''$, en trekke uit de punten p'' en q'',

waar zij de as van projectie snijden, loodlijnen op dezelve, tot aan de overeenkomstige projectiën $a'b'$ en $d'e'$ dezer doorsneden; hierdoor verkrijgt men de punten p' en q'. Op dezelfde wijze kan men nog meer zulke punten bepalen en door dezelve te vereenigen, bekomt men het gedeelte $l'q'p'n$ der schaduw. De schaduwlijn op het oppervlak des bols is een halve cirkel, waarvan het vlak loodregt staat op het verticale vlak; de projectiën $i'i'd'k'$ en $u''s''$ dezer schaduwlijn worden gevonden, door de projectiën der raakpunten van genoemde evenwijdige raaklijnen op'', rq'' enz. met elkander te vereenigen.

§ 458. Werkstuk. *De schaduw te construeren van eenen regten cirkelvormigen kegel en een regthoekig parallelopipedum, die beide met hun grondvlak op het horizontale vlak staan, alsmede de slagschaduw, die deze ligchamen op elkander en op het horizontale vlak werpen.*

Laat (L'1', L''1'') (fig. 171) de rigting der lichtstralen zijn. Wanneer men nu door den top (t',t'') een' lichtstraal trekt, evenwijdig aan de gegevene rigting, dan is het punt b', waar deze lichtstraal het horizontale vlak ontmoet, de schaduw van den top, terwijl de raaklijnen $b'c'$ de horizontale doorgangen zijn van rakende vlakken aan den kegel, die evenwijdig zijn aan de rigting der lichtstralen; deze raaklijnen bepalen dus de slagschaduw des kegels op het horizontale vlak. De lichtstraal, die door den top gaat, snijdt verder het verlengde bovenvlak van het parallelopipedum in het punt (a',a''), terwijl ditzelfde bovenvlak den kegel snijdt volgens eenen cirkel, die $d''e''$ tot straal heeft; beschrijft men dus uit t', met $d''e''$ als straal, eenen cirkel, en trekt men aan denzelven uit a' de raaklijnen $a'f'$, dan zijn $a'f'$ de horizontale projectiën der lijnen, volgens welke bovengenoemde rakende vlakken het bovenvlak van het parallelopipedum snijden. Door de raaklijnen $a'f'$ wordt nu de horizontale projectie $h'm'n'd'$ van de slagschaduw bepaald, die de kegel op het bovenvlak van het parallelopipedum werpt; de verticale projectie der slagschaduw, die door den kegel op het zijvlak geworpen wordt, dat naar denzelven is toegekeerd, is $g''h''m''k''$. De slagschaduw van het parallelopipedum op het horizontale vlak wordt op de gewone wijze bepaald. Construeert men de beschrijvende lijnen des kegels, die door de punten c' gaan, dan zullen deze, met den cirkelboog $c'c'$, de schaduwlijn des kegels uitmaken.

§ 459. Werkstuk. *De schaduw te bepalen, die door den omtrek eener nis op derzelver binnenste vlak geworpen wordt.*

Laat AS (fig. 172) de as van projectie wezen; beschrijft men dan in een horizontaal vlak, waarvan $a\,s$ de verticale doorgang is, een' halven cirkel, die bcd en $b''d''$ tot projectiën heeft, en verbeeldt men zich, dat een verticale cilinder, hebbende dezen halven cirkel tot grondvlak, van boven begrensd wordt door een horizontaal vlak $b'd'$, en dat er boven dezen cilinder een kwartbol geplaatst is, die hetzelfde middelpunt (o,o') en denzelfden straal $o'b'$ heeft, als het bovenvlak van den cilinder, dan wordt de ledige ruimte, achter het verticale vlak, en begrepen tusschen het oppervlak van den cilinder en dat van den kwartbol, eene *nis* genoemd.

Om nu de schaduw dezer nis te bepalen, wanneer (L'1', L''1'') de rigting der lichtstralen is, komt het er slechts op aan, om de projectiën te zoeken van de lijn, welke in het binnenste oppervlak der nis beschreven

wordt, door eene regte lijn, die altijd evenwijdig blijft aan de gegevene regte lijn (L'1', L''1''), en langs den omtrek $b''b'c'd'$ henen glijdt. Deze schaduw bestaat uit drie deelen, welke achtervolgens bepaald zullen worden.

Het eerste gedeelte der schaduw wordt op het cilindervlak beschreven, gedurende dat de bewegende regte lijn langs de verticale lijn (b, $b'b''$) henen glijdt. Nu is het klaar, dat gedurende deze beweging die regte lijn in een verticaal vlak blijft, waarvan de horizontale doorgang bc evenwijdig is aan L'1', en waarvan de doorsnede met den cilinder eene beschrijvende lijn is, die c tot horizontale, en $c''c'$ tot verticale projectie heeft; trekt men dus $b'c'$ evenwijdig aan L''1'', tot aan $c''c'$, dan zal $c''c'$ de lijn zijn, welke door de bewegende regte lijn binnen in den cilinder beschreven wordt, gedurende dat zij zich ter hoogte van het punt (b, b') verheft.

Het tweede gedeelte der schaduw ontstaat uit de doorsnijding van den cilinder der nis met den scheeven cilinder, welken de bewegende lijn voortbrengt, door langs den verticalen cirkel te glijden, die in $b'c'd'$ geprojecteerd is. Construeert men derhalve verschillende beschrijvende lijnen (fg, $f'g'$) enz. van dien scheeven cilinder, dan zullen de punten, waarin deze den cilinder der nis ontmoeten, in g, enz. op het horizontale vlak geprojecteerd worden, en men zal derzelver verticale projectiën g', enz. verkrijgen, door loodlijnen $g.g'$ enz. op de as van projectie te trekken. Op deze wijze is de kromme lijn $c'g'h'$ verkregen, begrepen tusschen het punt c' en de horizontale lijn $b'd'$. In de volgende § zal het middel worden aangewezen, om het punt h' te construeren, hetwelk op deze horizontale lijn gelegen is.

Het derde gedeelte der begeerde schaduw is eene kromme lijn, welke ontstaat uit de doorsnede van den kwartbol, die de nis begrenst, met den bovenvermelden scheeven cilinder. Men zal de punten dezer kromme lijn kunnen verkrijgen, door de beide oppervlakken te snijden door vlakken, die evenwijdig zijn aan de beschrijvende lijnen van den cilinder, en die men gemakshalve loodregt op het verticale vlak van projectie kan aannemen; in elk dezer vlakken zal alsdan eene beschrijvende lijn van den cilinder en een cirkel des bols gelegen wezen, en het punt, waar deze elkander snijden, is een punt der kromme. Het is in dit geval echter van belang, zijne toevlugt te nemen tot eene hulpprojectie, op een vlak, dat evenwijdig is aan de snijdende vlakken, ten einde de cirkels dezer doorsneden zich volgens derzelver ware grootten zouden projecteren.

Trekt men nu, evenwijdig aan L''1'', ergens eene lijn ik, en verbeeldt men zich door deze lijn een vlak, dat loodregt staat op het verticale vlak, dan zal op dit vlak de hulpprojectie worden uitgevoerd; men stelle zich dus hetzelve voor, als om de lijn ik op het verticale vlak te zijn nedergeslagen. Al de evenwijdige doorsneden des bols zijn cirkels, waarvan de verticale projectiën gelegen zijn in de lijnen $d'n'$, $p'q'$, enz., die evenwijdig loopen aan L''1'', en men verkrijgt de projectiën dezer cirkels op het nieuwe projectievlak, door op ik de loodlijnen $d'k$, $d'i$, $p'm$, enz. neder te laten, en uit k als middelpunt, met ki, km, enz. als stralen cirkels te beschrijven. Er blijft nu nog over, om aan te wijzen, hoe de doorsneden met den scheeven cilinder, of deszelfs beschrijvende lijnen, die evenwijdig zijn aan (L'1', L''1''), op het nieuwe vlak

geprojecteerd worden. Laat daartoe b. v. $(er, e'r')$ eene dezer beschrijvende lijnen zijn, en (r, r') een willekeurig punt in dezelve, dan zal het punt (e, e'), als in het verticale vlak liggende, zich in i projecteren, terwijl tr den afstand aantoont, waarop het punt (r, r') zich achter het verticale vlak bevindt; trekt men dus $r'u$ loodregt op ik, en maakt men $uv = tr$, dan zal iv de projectie wezen der beschrijvende lijn $(er, e'r')$ op het hulpvlak. Andere beschrijvende lijnen projecteren zich op hetzelve volgens lijnen, die evenwijdig zijn aan iv, en de snijpunten 1, 2, x, enz., van deze evenwijdige lijnen met de overeenkomstige cirkels, zullen op het hulpvlak de projectiën der begeerde kromme bepalen.

Het is nu zeer gemakkelijk, om derzelver projectiën $z'y'h'$ en zyh op de oorspronkelijke vlakken van projectie te construeren. Beschouwt men b. v. het punt, dat zich in x projecteert, dan vindt men deszelfs verticale projectie y', door uit x eene loodlijn op $w'y'$ neder te laten, en deszelfs horizontale projectie y, door uit y' eene loodlijn door de as van projectie te trekken. Bij deze constructiën moet nog opgemerkt worden het punt (z, z'), hetwelk bepaald wordt door de raaklijn evenwijdig met $L''1''$ aan den cirkel $b'e'd'$.

§ 460. De projectie van de laatste kromme lijn op het hulpvlak, is eene regte lijn; want trekt men de lijnen $k1$, $k2$, enz., dan zijn al de driehoeken $i1k$, $m2k$, enz, gelijkbeenig, en derzelver zijden $i1$, $m2$, enz. zijn onderling evenwijdig; de hoeken $1ik$, $2mk$, enz. zijn derhalve aan elkander gelijk, alsmede de andere hoeken, die op deze zijden gelegen zijn. De hoeken $ik1$, $mk2$, enz. zijn derhalve ook gelijk, en gevolgelijk zijn de punten 1, 2, x, ... k in eene regte lijn gelegen; of wel, hetgeen op hetzelfde uitkomt, de kromme lijn, beschreven binnen in den bol, is een groote cirkel, welks vlak loodregt staat op het vlak der hulpprojectie (*).

Hieruit vloeit een gemakkelijk middel voort, om punten der kromme lijn te bepalen, die op willekeurige cirkels des bols zijn gelegen. Wil men b. v. het punt bepalen, dat op den horizontalen cirkel $b'd'$ ligt, dan zoeke men de gemeene doorsnede van het vlak dezes cirkels met dat der kromme, en het punt, waar deze lijn den gegeven' cirkel snijdt, zal het begeerde wezen. Deze gemeene doorsnede projecteert zich volgens $b'd'$ op het verticale vlak, en volgens $k1$ op het hulpvlak; men zal derhalve de projectiën d' en α van eenig punt dezer lijn op die vlakken verkrijgen, door uit d' eene loodlijn op ik neder te laten. Daar nu de afstand, van dit punt (d', α) tot het verticale vlak, gelijk is aan $\alpha\beta$, zoo zal, als men $d'\gamma = \alpha\beta$ neemt, het punt γ tot de horizontale projectie der gemeene doorsnede van bovengenoemde cirkelvlakken behooren. Dewijl voorts beide deze vlakken door het middelpunt des bols gaan, zoo gaat ook hunne gemeene doorsnede door dit middelpunt, en gevolgelijk is $o\gamma$ de horizontale projectie dezer gemeene doorsnede. Het punt h, waar deze lijn den halven cirkel bcd snijdt, is derhalve de horizontale projectie van het begeerde punt, en deszelfs verticale projectie h' wordt gevonden, door uit h eene loodlijn door de as van projectie te trekken.

(*) Deze cirkel heeft tot verticale projectie eene ellips, waarvan $o's'$ de halve groote as is, en waarvan de halve kleine as $o'n'$ bepaald wordt, door uit 1 eene loodlijn op $e'r'$ neder te laten.

WERKSTUKKEN TOT OEFENING.

---

1. Een punt door zijne beide projectiën gegeven zijnde, vraagt men de nieuwe projectiën van dat punt te bepalen, als men een van beide projectievlakken verplaatst.

2. Eene lijn gegeven zijnde, een punt in dezelve te bepalen, dat op eenen gegevenen afstand boven of beneden het horizontale vlak ligt.

3. Het punt in de lijn (C'D', C''D'') (fig. 11) te bepalen, dat even ver van het horizontale, als van het verticale vlak afstaat.

4. De punten gegeven zijnde, waar eene lijn elk der beide projectievlakken ontmoet, vraagt men de projectiën dezer lijn te bepalen.

5. Eene lijn met een punt in dezelve gegeven zijnde, vraagt men in deze lijn een ander punt te vinden, dat van het gegeven punt op eenen gegevenen afstand staat.

6. Den afstand tusschen twee gegevene punten in gegevene reden te verdeelen.

7. Door een gegeven punt eene lijn te trekken, evenwijdig aan het verticale vlak, en die eenen gegevenen hoek maakt met het horizontale vlak.

8. Door een gegeven punt eene lijn te trekken, die eenen gegevenen hoek maakt met het horizontale vlak, en die tevens evenwijdig loopt aan een vlak, dat loodregt staat op het horizontale vlak.

9. Wanneer het snijpunt eener lijn met een der projectievlakken, hare projectie op dit vlak, en den hoek, dien zij met hetzelve maakt, gegeven zijn, vraagt men hare andere projectie te bepalen.

10. De doorsnede van twee vlakken te bepalen, wanneer derzelver doorgangen elkander snijden, maar deze snijpunten buiten het vlak van teekening vallen.

11. De doorsnede van twee vlakken te construeren, wanneer het eene vlak evenwijdig is aan de as van projectie, en het andere vlak evenwijdig is aan het horizontale vlak.

12. Den hoek te construeren, dien de doorgangen van een gegeven hellend vlak met elkander in de ruimte maken.

13. Door een gegeven punt eene lijn te trekken, evenwijdig aan twee elkander snijdende vlakken.

14. In een gegeven hellend vlak eene lijn te bepalen, die evenwijdig is aan het horizontale vlak.

15. De doorsnede te bepalen van een hellend vlak met eene lijn, die loodregt staat op het horizontale vlak.

16. De doorsnede te bepalen van een hellend vlak met eene lijn, die evenwijdig is aan de as van projectie.

17. Door een gegeven punt eene lijn te trekken, evenwijdig aan een gegeven vlak.

18. Wanneer de doorgangen van een vlak evenwijdig zijn aan de as van projectie, vraagt men de hoeken te bepalen, die dit vlak met de beide projectievlakken maakt.

19. De horizontale doorgang van een vlak, en de hoek, dien hetzelve met het horizontale vlak maakt, gegeven zijnde, den verticalen doorgang van dit vlak te construeren.

20. De verticale doorgang van een vlak, en de hoek, dien hetzelve met het horizontale vlak maakt, gegeven zijnde, deszelfs horizontalen doorgang te construeren.

21. Men vraagt hetzelfde te bepalen, als de gegevene verticale doorgang evenwijdig is aan de as van projectie.

22. De doorgangen van het vlak te bepalen, dat den hoek midden door deelt, dien een gegeven vlak maakt met het horizontale vlak.

23. Een punt in een vlak gegeven zijnde, vraagt men door dit punt eene lijn te trekken, die met het horizontale vlak eenen gegevenen hoek maakt.

24. De horizontale projectiën van de hoekpunten eens driehoeks, gelegen in een hellend vlak, gegeven zijnde, vraagt men de wezenlijke gedaante van dezen driehoek te bepalen.

25. Een vlak ligt met eene in hetzelve gelegene lijn op het horizontale vlak: men vraagt de projectiën dezer lijn te bepalen, wanneer dit vlak zich om den horizontalen doorgang opwaarts beweegt, tot dat het een' gegeven' hoek met het horizontale vlak maakt.

26. De doorgangen van een vlak en de horizontale projectie van de diagonaal eens vierkants, gelegen in dit vlak, gegeven zijnde, vraagt men de projectiën van dit vierkant te bepalen.

27. Eene lijn in een vlak gegeven zijnde, vraagt men door een punt van deze lijn, in het vlak eene lijn te trekken, die met de eerste eenen gegevenen hoek maakt.

28. De lijn te construeren, die den hoek van twee gegevene lijnen midden door deelt.

29. Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat evenwijdig is aan een vlak, waarvan de doorgangen evenwijdig loopen met de as van projectie.

30. Een punt te bepalen, dat op eenen gegevenen afstand staat van een gegeven vlak.

31. Den afstand van twee evenwijdige vlakken te construeren.

32. Een vlak te construeren, dat evenwijdig is aan een gegeven vlak, en op eenen gegevenen afstand van hetzelve staat.

33. Den afstand te construeren van twee gegevene evenwijdige lijnen.

34. Op eene gegevene lijn, uit een gegeven punt in dezelve, eene ›odlijn op te rigten, die evenwijdig is aan het verticale vlak.

35. Een vlak ligt op het horizontale vlak nedergeslagen: indien nu :ne lijn, waarvan de beide projectiën gegeven zijn, steeds denzelfden and ten opzigte van dit vlak behoudt, wanneer hetzelve zich om zijnen orizontalen doorgang opwaarts beweegt, tot dat het een' gegeven' hoek ıet het horizontale vlak maakt, vraagt men de projectiën der lijn na e opgegevene beweging te bepalen.

36. Gegeven zijnde twee lijnen, die elkander kruisen, vraagt men ›or eene derzelve een vlak te brengen, dat evenwijdig is met de ndere.

37. Door een gegeven punt eene lijn te trekken, die twee elkander ruisende lijnen snijdt.

38. Men vraagt het vlak te bepalen, dat door twee lijnen gaat, die :ide evenwijdig zijn aan de as van projectie.

39. Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat loodregt staat › een gegeven vlak.

40. Het vlak te construeren, dat den hoek van twee gegevene vlak-en midden door deelt.

41. Den hoek te bepalen, dien eene gegevene lijn maakt met een egeven vlak.

42. Den hoek te construeren, dien de as van projectie maakt met een egeven hellend vlak.

43. Door eene lijn, die evenwijdig is aan het horizontale vlak, een lak te brengen, dat met het horizontale vlak eenen gegevenen hoek ıaakt.

44. Door eene lijn, die evenwijdig is aan de as van projectie, een lak te brengen, dat met het horizontale vlak eenen gegevenen hoek ıaakt.

45. Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat met het hori-ontale vlak eenen hoek maakt, gelijk aan den hoek, dien de gegevene jn maakt met het horizontale vlak.

46. Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat met een ge-even vlak eenen gegevenen hoek maakt.

47. Den kortsten afstand te construeren van twee lijnen, die elkan-er kruisen, en waarvan de eene in het verticale vlak ligt.

48. De projectiën te bepalen van een regelmatig tetraëdrum, waar-an eene der ribben in het horizontale vlak ligt, en het aangrenzende ijvlak eenen gegevenen hoek maakt met het horizontale vlak.

49. De projectiën te bepalen van eenen cubus, die met een zijner ibben op het horizontale vlak staat, zoodanig, dat de aangrenzende ibben hoeken van 45° met het horizontale vlak maken.

50. De projectiën te bepalen van een regelmatig dodecaëdrum, dat net een zijner zijvlakken op het horizontale vlak ligt.

51. De doorsnede te bepalen van een willekeurig vlak met eenen cubus, lie met een zijner zijvlakken op het horizontale vlak staat, en deze door-nede omslaan op een der projectievlakken.

52. Een punt in het oppervlak eens bols te vinden, dat zich op egevene afstanden van de projectievlakken bevindt.

53. De punten te construeren, waarin eene lijn, die evenwijdig loopt aan de as van projectie, eenen gegevenen bol snijdt.

54. De doorsnede te construeren van een' bol met een vlak, dat loodregt staat op het horizontale vlak.

55 De doorsnede te construeren van een' bol met een vlak, dat evenwijdig is aan het horizontale vlak.

56. De doorsnede te construeren van een' bol met een vlak, waarvan de doorgangen evenwijdig zijn aan de as van projectie.

57. De geographische lengte en breedte van eene plaats op aarde gegeven zijnde, vraagt men de beide projectiën van dezelve te bepalen, wanneer men gemakshalve het middelpunt der aarde in de as van projectie aanneemt, en de as der aarde loodregt op het horizontale vlak.

58. Uit een gegeven punt als middelpunt eenen bol te beschrijven, die een gegeven vlak aanraakt.

59. Aan een' gegeven' bol een rakend vlak te brengen, dat evenwijdig is met een gegeven vlak.

60. Door eene lijn, die loodregt staat op het horizontale vlak, een rakend vlak aan eenen bol te brengen.

61. Uit een gegeven punt als middelpunt, eenen bol te beschrijven, die eenen gegevenen bol aanraakt.

62. Een' bol te beschrijven, die eenen gegevenen straal heeft, en die eenen gegevenen bol in een gegeven punt aanraakt.

63. Een' bol te beschrijven, die door een gegeven punt gaat, en die eenen gegevenen bol in een gegeven punt aanraakt.

64. Een' bol te beschrijven, die door een gegeven punt gaat, en die een gegeven vlak in een gegeven punt aanraakt.

65. Door een gegeven punt een rakend vlak aan twee gelijke bollen te brengen.

66. Een' bol te beschrijven, die door twee gegevene punten gaat, een' gegeven' straal heeft, en het horizontale vlak aanraakt.

67. Een' bol te beschrijven, die door drie gegevene punten gaat, en het horizontale vlak aanraakt.

68. Een' bol te beschrijven, die door drie gegevene punten gaat, en eenen gegevenen straal heeft.

69. In eene gegevene driehoekige piramide een' bol te beschrijven; gemakshalve een der zijvlakken als horizontaal, en een der drie andere zijvlakken loodregt op het verticale vlak aannemende.

70. Een punt buiten eenen bol gegeven zijnde, vraagt men uit dit punt eene raaklijn aan dien bol te trekken, en tevens den kleinen cirkel te bepalen, waarin al de raakpunten gelegen zijn.

71. Eene lijn en een bol gegeven zijnde, vraagt men eene raaklijn aan den bol te trekken, evenwijdig aan de gegevene lijn, en tevens den grooten cirkel te bepalen, waarin al de raakpunten gelegen zijn.

72. In perspectief te brengen, eene regelmatige zeshoekige piramide en een regelmatig achthoekig prisma, die met hunne grondvlakken op het horizontale vlak staan.

73. In perspectief te brengen, twee balken, waarvan de eene op het horizontale vlak ligt, en waarvan de andere in een' willekeurigen stand met zijn grondvlak op het bovenvlak des eersten rust.

4. Eene vierhoekige piramide en een regthoekig parallelopipedum staan hunne grondvlakken op het horizontale vlak: men vraagt derzelver schaduw op elkander en op het horizontale vlak te bepalen; de rigting lichtstralen willekeurig aannemende.
5. Dit laatste, met de schaduwen, in perspectief te brengen.
6. Op een cilindervlak, waarvan de rigtlijn in het horizontale vlak , is eene kromme lijn beschreven, die zich op het horizontale vlak een cirkel projecteert: men vraagt de verticale projectie dezer kromme te bepalen.
7. Gegeven zijnde eene regte lijn en de straal eens cirkels, waarvan het delpunt zich altijd in deze lijn, en waarvan het vlak zich altijd loodregt leze lijn beweegt, vraagt men den horizontalen doorgang te bepalen het cilindervlak, dat op deze wijze ontstaat.
8. Op het bovenste blad van een kegelvlak, waarvan de rigtlijn in horizontale vlak ligt, is eene kromme lijn beschreven, die een' el tot verticale projectie heeft: men vraagt de horizontale projectie r kromme lijn te bepalen.
9. Gegeven zijnde eene regte lijn en een punt in dezelve, alsmede hoek, dien eene bewegende lijn, gaande altijd door dit punt, met de te lijn maakt, vraagt men den horizontalen doorgang te bepalen van kegelvlak, dat op deze wijze ontstaat.
0. Wanneer eene regte lijn, door een gegeven punt gaande, altijd oppervlak eens bols aanraakt, vraagt men de projectiën te bepalen de aanrakingskromme, alsmede de doorsnede van het omhullings- : met het horizontale vlak.
1. Wanneer eene regte lijn zich evenwijdig aan eene gegevene regte beweegt, en het oppervlak eens bols aanraakt, vraagt men de projectiën te bepalen van de aanrakingskromme, alsmede de doorsnede van omhullingsvlak met het horizontale vlak.
2. Men vraagt eenige standen te construeren van de regte lijn, te een hellend schroefvlak beschrijft, en de horizontale projectie van g punt dezes oppervlaks gegeven zijnde, vraagt men de verticale ectie van dit punt te bepalen.
3. Men vraagt eenige standen te construeren van de regte lijn, welke oppervlak van de kegelvormige wig van *Wallis* voortbrengt, en de zontale projectie van eenig punt dezes oppervlaks gegeven zijnde, ıgt men de verticale projectie van dit punt te bepalen.
4. Wanneer eene regte lijn, altijd evenwijdig aan het horizontale : blijvende, op eene andere regte lijn en op een' bol rust, dan ont- t hierdoor een scheef oppervlak (eene soort van conoïde): men vraagt kromme lijn te bepalen, volgens welke de bol wordt aangeraakt.
5. Van een omwentelingsvlak is de as loodregt op het horizontale : indien nu de verticale projectie van de hoofdmeridiaan dezes op- vlaks gegeven is, vraagt men de verticale projectie van eene willerige meridiaan te bepalen.
6. De as van een omwentelingsvlak staat loodregt op het horizontale vlak: als nu de beide projectiën van eenige meridiaan gegeven , vraagt men de projectiën van de hoofdmeridiaan dezes oppervlaks bepalen.

87. Op een omwentelingsvlak, waarvan de as loodregt staat op h horizontale vlak, is eene kromme lijn beschreven, waarvan de vertic projectie eene regte lijn is, die de verticale projectie van de omwen lingsas snijdt, en niet evenwijdig is aan de as van projectie: men vra de horizontale projectie dezer kromme lijn te bepalen.

88. De ontwikkelbare héliçoïde te construeren, en derzelver doorsn met het horizontale vlak te bepalen.

89. De punten te bepalen, waarin eene gegevene regte lijn een g geven cilindervlak snijdt.

90. De punten te bepalen, waarin eene gegevene regte lijn een g geven kegelvlak snijdt.

91. De doorsnede te bepalen van eene regte lijn met het oppervl van de kegelvormige wig van *Wallis*.

92. De doorsnede te bepalen van het oppervlak van den gewon ring met eene regte lijn, die evenwijdig is aan het verticale vlak, waarvan de horizontale projectie raaklijn is aan de horizontale projec van de keel.

93. De doorsnede te bepalen van een regt cirkelvormig cilindervl met een plat vlak, waarvan de doorgangen evenwijdig zijn aan de as v projectie, en de doorsnede om te slaan op het horizontale vlak.

94. De doorsnede te bepalen van een willekeurig plat vlak met e willekeurig cilindervlak, als de verticale projectie der beschrijvende li evenwijdig is aan den verticalen doorgang des vlaks, en de horizonta projectie der beschrijvende lijn evenwijdig is aan de as van projectie terwijl de horizontale doorgang des vlaks de rigtlijn snijdt.

95. De doorsnede te bepalen van een regt cirkelvormig kegelvlak m een plat vlak, dat loodregt is op het verticale vlak, en dat de beid bladen des kegelvlaks snijdt. De doorsnede om te slaan op het verticale vlak.

96. De doorsnede te bepalen van een regt cirkelvormig kegelvlak met een plat vlak, waarvan de doorgangen evenwijdig zijn aan de as van projectie.

97. De doorsnede te bepalen van een regt cirkelvormig kegelvlak met een vlak, dat loodregt staat op het horizontale vlak, als de horizontale doorgang des vlaks door de horizontale projectie van den top gaat, en de rigtlijn des kegelvlaks snijdt.

98. De doorsnede te bepalen van het oppervlak van den gewonen ring met een plat vlak, dat loodregt staat op beide projectievlakken en het oppervlak in een punt van de keel aanraakt. De doorsnede om te slaan op het horizontale vlak.

99. De doorsnede te bepalen van twee willekeurige cilindervlakken, waarvan de rigtlijnen in het verticale vlak liggen, en waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig zijn aan het horizontale vlak; de rigtlijnen zoodanig aannemende, dat de eene cilinder den anderen niet doorboort.

100. Gegeven zijnde twee lijnen in het horizontale vlak, die elkander loodregt snijden, vraagt men de punten te construeren, die op gelijken afstand zijn van elk dezer lijnen.

101. Er zijn twee lijnen gegeven; de eene is loodregt op het hori-

ontale vlak, en de andere evenwijdig aan de as van projectie: men raagt de punten te construeren, die op gegevene afstanden staan van lk dezer lijnen.

102. Eene regte lijn te bepalen, die evenwijdig is aan twee gegevene evenwijdige lijnen, en die van elk eenen gegevenen afstand heeft.

103. De doorsnede te construeren van twee kegelvlakken, die elkander niet doorboren; de rigtlijnen in het horizontale vlak, en de toppen even hoog boven het horizontale vlak gelegen zijnde.

104. Van twee kegelvlakken zijn gegeven de assen, de toppen en de hoeken, die de beschrijvende lijnen met elk der assen maken: men vraagt de doorsnede dezer kegelvlakken te construeren de assen niet evenwijdig aannemende.

105. De doorsnede te construeren van een regt cirkelvormig cilindervlak met een regt cirkelvormig kegelvlak, als de rigtlijnen in het horizontale vlak liggen, en elkander snijden.

106. De doorsnede te construeren van een' bol met een cilindervlak, waarvan de rigtlijn in het horizontale vlak ligt, en waarvan de beschrijvende lijn evenwijdig is aan het verticale vlak. De gegevens zoodanig aan te nemen, dat de cilinder den bol doorboort.

107. Van een regt cirkelvormig cilindervlak ligt de rigtlijn in het verticale vlak, men vraagt deszelfs doorsnede te construeren met het oppervlak eens bols. De gegevens zoodanig aan te nemen, dat de cilinder den bol doorboort.

108. Van een regt cirkelvormig cilindervlak ligt de rigtlijn in het horizontale vlak, men vraagt deszelfs doorsnede te construeren met het oppervlak eens bols. De gegevens zoodanig aan te nemen, dat de cilinder den bol niet doorboort.

109. De doorsnede te construeren van een' bol met een regt cirkelvormig kegelvlak, dat op het horizontale vlak staat; de gegevens zoodanig aannemende, dat de kegel den bol niet doorboort.

110. De doorsnede te construeren van een regt cirkelvormig kegelvlak, staande op het horizontale vlak, met een' bol, waarvan het middelpunt even hoog boven het horizontale vlak ligt, als de top des kegels, en waarvan de horizontale projectie de rigtlijn des kegels omvat.

111. De doorsnede te construeren van een' bol met een regelmatig zeshoekig prisma, waarvan de as door het middelpunt des bols gaat, en loodregt staat op het horizontale vlak, wanneer twee der zijvlakken van het prisma evenwijdig zijn aan het verticale vlak.

112. De doorsnede te construeren van het oppervlak van den gewonen ring met het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen cilinder, die op het horizontale vlak staat; de gegevens zoodanig aannemende, dat de cilinder den ring doorboort.

113. Een punt in de ruimte te construeren, dat van drie gegevene vlakken op gegevene afstanden staat.

114. Van eene driehoekige piramide zijn de hoekpunten der basis door derzelver projectiën gegeven, en bovendien zijn de hoeken bekend, die elk der opstaande ribben met het vlak van de basis maken: men vraagt het toppunt van deze piramide te construeren.

115. Een punt in de ruimte te vinden, waaruit drie gegevene punten, twee aan twee, onder gegevene hoeken gezien worden.

116. Een punt in de ruimte te construeren, dat op gegevene afstanden staat van een gegeven punt, van eene gegevene lijn en van een gegeven vlak.

117. Op een cirkelvormig cilindervlak, waarvan de beschrijvende lijn loodregt staat op het horizontale vlak, is eene kromme lijn beschreven, die zich in de ontwikkeling als een gelijkzijdige driehoek vertoont: men vraagt de verticale projectie dezer kromme lijn te bepalen.

118. Op het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel, waarvan de straal des grondvlaks tot de schuinsche zijde staat, als 17 tot 24, is eene parabool beschreven: men vraagt het kegelvlak te ontwikkelen, en deze parabool in de ontwikkeling voor te stellen.

119. Op het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel, waarvan de hoek, dien de schuinsche zijde met de as maakt, 30° bedraagt, is eene ellips beschreven: men vraagt dit kegelvlak te ontwikkelen, en deze ellips in de ontwikkeling voor te stellen.

120. Op het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel, waarvan de omtrek des grondvlaks in de ontwikkeling een boog van 225° wordt, is eene hyperbool beschreven: men vraagt dit kegelvlak te ontwikkelen, en deze hyperbool in de ontwikkeling voor te stellen.

121. De projectiën te bepalen van eene kromme lijn, die op het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel zoodanig beschreven is, dat zij bij het ontwikkelen van dat oppervlak in eene regte lijn overgaat.

122. Eene lijn gegeven zijnde, buiten een gegeven cilindervlak, vraagt men te onderzoeken, of door deze lijn rakende vlakken aan het cilindervlak kunnen gebragt worden; de rigtlijn des cilindervlaks in het horizontale vlak gegeven zijnde.

123. Een' bol te construeren, die een' gegeven' straal heeft, en die een gegeven cilindervlak in een gegeven punt aanraakt.

124. Een bol en een cilindervlak gegeven zijnde, vraagt men vlakken te construeren, die beide deze oppervlakken aanraken.

125. Eene lijn gegeven zijnde, buiten een gegeven kegelvlak, vraagt men te onderzoeken, of door deze lijn rakende vlakken aan het kegelvlak kunnen gebragt worden; de rigtlijn des kegelvlaks in het horizontale vlak gegeven zijnde.

126. Een' bol te construeren, die een' gegeven' straal heeft, en die een gegeven kegelvlak in een gegeven punt aanraakt.

127. Een bol en een kegelvlak gegeven zijnde, vraagt men vlakken te construeren, die beide deze oppervlakken aanraken.

128. Van een cilindervlak de beschrijvende lijn willekeurig en de rigtlijn een cirkel zijnde, gelegen in het horizontale vlak, vraagt men rakende vlakken aan dit cilindervlak te brengen, die een' gegeven' hoek maken met het horizontale vlak.

129. Van een scheef kegelvlak de rigtlijn een cirkel zijnde, gelegen in het horizontale vlak, vraagt men rakende vlakken aan dit kegelvlak te brengen, die een' gegeven' hoek maken met het horizontale vlak.

130. Een rakend vlak te construeren aan een willekeurig punt van

het oppervlak van den gewonen ring, alsmede aan een willekeurig punt van de keel dezes oppervlaks.

131. Aan een omwentelingsvlak, waarvan de as loodregt staat op het horizontale vlak, een rakend vlak te brengen, dat een' gegeven' hoek maakt met het horizontale vlak.

132. Een kegelvlak en een omwentelingsvlak gegeven zijnde, vraagt men vlakken te construeren, die beide deze oppervlakken aanraken.

133. Een cilindervlak en een omwentelingsvlak gegeven zijnde, vraagt men vlakken te construeren, die beide deze oppervlakken aanraken.

134. Een rakend vlak te construeren aan een gegeven punt van het oppervlak van de kegelvormige wig van *Wallis*.

135. Een regte cirkelvormige kegel staat in een' hellenden stand ten opzigte van de projectievlakken: men vraagt de projectiën van dezen kegel te bepalen.

136. De verticale projectie te construeren van eene vierkante schroef zonder spil.

137. De verticale projectie te construeren van eene driehoekige schroef, waarbij de hoogte van den schroefgang grooter is, dan de basis van den bewegenden gelijkbeenigen driehoek.

138. In dezelfde onderstelling de verticale projectie te construeren van eene driehoekige schroef zonder spil.

139. De verticale projectie te construeren van eene driehoekige schroef, waarbij de hoogte van den schroefgang gelijk is aan de basis van den bewegenden gelijkbeenigen driehoek.

140. In perspectief te brengen een' regten cirkelvormigen kegel, die met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, en evenwijdig aan het grondvlak is afgeknot (*).

141. Een gedeelte van de omwentelings-hyperboloïde met één blad in perspectief te brengen; onderstellende, dat de omwentelings-as loodregt staat op het horizontale vlak.

142. Een' bol, die op het horizontale vlak rust, in perspectief te brengen.

143. Volgens de leerwijze der isometrische perspectief, in perspectief te brengen een regthoekig parallelopipedum, dat met zijn grondvlak op het horizontaal-isometrisch vlak staat, en waarvan twee der opstaande zijvlakken evenwijdig zijn aan elk der andere isometrische vlakken (†).

144. In perspectief te brengen, een regthoekig parallelopipedum, dat met zijn grondvlak op het horizontaal-isometrisch vlak staat, en waarvan de opstaande zijvlakken een' willekeurigen stand hebben, ten opzigte der beide andere isometrische vlakken.

145. In perspectief te brengen, eene regelmatige zeshoekige piramide, die met zijn grondvlak op het horizontaal-isometrisch vlak staat.

146. In perspectief te brengen, een regelmatig achthoekig prisma, dat met zijn grondvlak op het horizontaal-isometrisch vlak staat.

(*) In dit werkstuk, zoowel als in de beide volgende, wordt de perspectief volgens de leerwijze der wijkende schaal begeerd.

(†) In de vijf volgende werkstukken wordt mede de isometrische perspectief bedoeld.

147. In perspectief te brengen, een' regten cirkelvormigen
die met zijn grondvlak op het horizontaal-isometrisch vlak staat
148. In perspectief te brengen, een' regten cirkelvormigen
die met eene zijner beschrijvende lijnen op het horizontaal-is
vlak ligt, en waarvan het grond- of bovenvlak evenwijdig is
der beide andere isometrische vlakken.

149. Een regte cirkelvormige kegel staat met zijn grondvlak
horizontale vlak, en een regte cirkelvormige cilinder ligt met een
beschrijvende lijnen op het horizontale vlak, terwijl zijn grond- of
vlak evenwijdig is aan het verticale vlak: men vraagt de eigene
dezer ligchamen te bepalen, alsmede de slagschaduw, die zij op
en op het horizontale vlak werpen.

150. De eigene schaduw te bepalen op het oppervlak van den ge
ring, die op het horizontale vlak ligt.

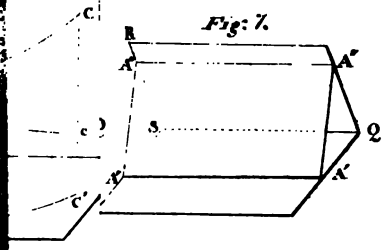


Fig: 7.
C
R
A
A''
S
Q
A'
C'

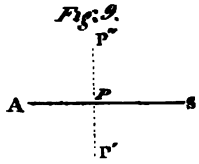


Fig: 9.
P''
A
P
S
P'

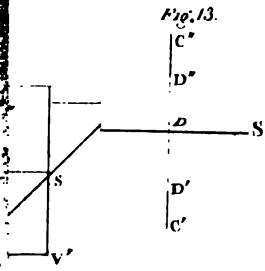


Fig: 13.
C''
D''
D
S
S
D'
C'
V'

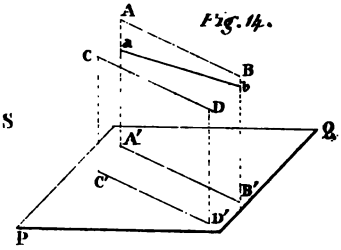


Fig: 14.
A
a
C
B
b
D
Q
A'
C'
B'
D'
P

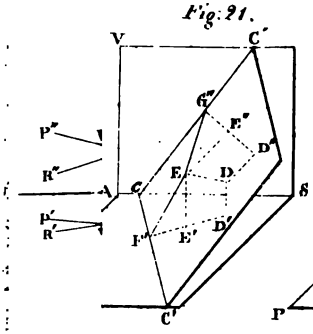


Fig: 21.
V
C''
G''
F''
D''
P''
R''
A
C
E
D
S
P'
R'
F'
E'
D'
C'

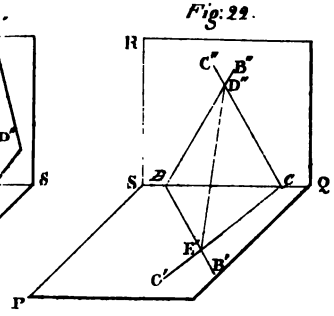
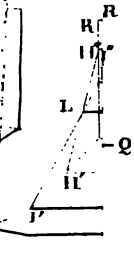


Fig: 22.
R
C''
B''
D''
S
B
C
Q
F'
C'
B'
P


R
R
L
Q
H'
P'

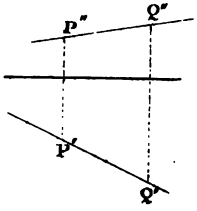
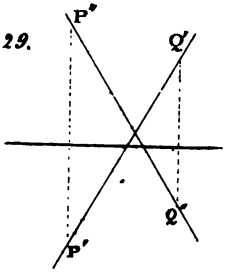


Fig: 29.
P''
Q''
P'
Q'


P''
Q'
Q''
P'

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.

IE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

·ook is under no circumstances to be
taken from the Building